

On a par exemple, si $f: E \rightarrow F$ est une application

1/4 bis

f surjective si $\forall y \in F \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$ (*)

f injective si $\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f bijective si $\forall y \in F \exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Attention à l'ordre des quantificateurs : on ne peut pas échanger un $\exists$ et un $\forall$.

Comparer l'énoncé (*) à l'énoncé

$$\exists x \in E \forall y \in F f(x) = y$$

qui ne peut être vrai que lorsque F a un seul élément.

En revanche, on peut échanger un $\forall$ avec un $\forall$
et aussi

un $\exists$ avec un $\exists$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in E \forall y \in F \\ \forall y \in F \forall x \in E \\ \forall (x, y) \in E \times F \end{array} \right\} \text{ tout ceci est équivalent.}$$

Négation d'un énoncé avec $\forall$ et $\exists$.

5

les prédicats $\text{non}(\forall x \in E : P(x))$

et

$\exists x \in E : \text{non}(P(x))$

sont équivalents.

Pour montrer qu'un énoncé $\forall$ est faux, il suffit de trouver un contre-exemple

Autre règle d'or

Pour montrer qu'un énoncé $\forall^{x \in A}$ est vrai, la preuve comme toujours par "soit x dans A "

De même, les prédicats

$\text{non}(\exists x \in E : P(x))$

et

$\forall x \in E : \text{non}(P(x))$

sont équivalents.

Il est important de savoir écrire la négation de prédicats contenant un ou plusieurs $\exists / \forall$.

Exemples

$P : \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha < x$

$\text{non } P : \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha \geq x$

l'énoncé $\text{non}(P)$ est vrai (le choix $x=0$ convient)
donc l'énoncé P est faux

$Q : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x = ny$

$\text{non } Q : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \neq ny$

A2.4 Techniques de preuve

6

Comment faire pour prouver qu'un résultat est vrai ?
(une assertion)

Voici plusieurs méthodes de preuve

• La disjonction de cas

On vérifie que ~~la~~ l'assertion est vraie dans tous les cas possibles (sans en oublier)

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : x < y^2$

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}$ [règle d'or du $\forall$]

- Si $x < 0$, $y = 0$ convient car $x < 0 = y^2$
- Si $0 \leq x < 1$, alors $y = 1$ convient car $x < 1 = y^2$
- Si $x = 1$, $y = 2$ convient car $x = 1 < 4 = y^2$
- Si $x \geq 1$, alors $y = x$ convient car
 $x < x^2 = y^2$ (obtenue en multipliant par le réel strictement positif x l'inégalité $x > 1$).

On a bien traité tous les cas : tout réel x vérifie
 $x < 0$ ou $0 \leq x < 1$ ou $x = 1$ ou $x \geq 1$.

• Preuves ensemblistes - Soient A et B des ensembles

Lorsqu'on veut montrer une inclusion $A \subset B$, on raisonne toujours comme suit :

« Soit $x \in A$

⋮

Alors $x \in B$

On a donc montré que $A \subset B \Rightarrow$

← à compléter selon l'exercice !

En particulier, on peut obtenir la

• Preuve par double inclusion

Soient A, B deux ensembles. Pour montrer l'égalité $A=B$, il suffit de montrer que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

Exemple Pour les ensembles A, B, C , montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

□ Soit $x \in A \cap (B \cup C)$.

Alors ~~$x \in A$~~ $x \in B \cup C$, donc $x \in B$ ou $x \in C$.

• Si $x \in B$, comme $x \in A$ on a $x \in A \cap B$

donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

• Si $x \in C$, comme $x \in A$ on a $x \in A \cap C$

donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dans tous les cas, on a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

On a donc montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

□ Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

• Si $x \in A \cap B$, $x \in A$ et $x \in B \subset B \cup C$

donc $x \in A \cap (B \cup C)$

• Si $x \in A \cap C$, $x \in A$ et $x \in C \subset B \cup C$

donc $x \in A \cap (B \cup C)$

Dans tous les cas, on a $x \in A \cap (B \cup C)$.

On a donc montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Par double inclusion, on a donc $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dans le même genre, on a la

• Preuve par double inégalité. Soient a, b des réels.

Pour montrer l'égalité $a=b$, il suffit de montrer séparément que $a \leq b$ et $a \geq b$.

Preuve par double implication

Soient P et Q des assertions. Pour montrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, il suffit de montrer séparément les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Comment montrer une implication ?

Beaucoup d'énoncés qu'on vous demande de montrer sont des implications. Quand on vous dit : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\underbrace{\hspace{2cm}}_P$. Montrer que $\underbrace{\hspace{2cm}}_Q$, on vous demande de montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie (on dit que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion).

Preuve par contraposée

Les implications $P \Rightarrow Q$ et $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ont même valeur de vérité. Parfois, la seconde est plus facile à montrer.

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

[ε (epsilon) est une lettre grecque qu'on aime bien utiliser pour un nombre réel qui peut être tout petit].

$$P(x) : " \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon "$$

$$Q(x) : " x = 0 "$$

($\forall \varepsilon > 0$ est la même chose que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$)

On demande de montrer ^{que} l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

La contraposée est $\text{non } Q(x) \Rightarrow \text{non } P(x)$ où

$$\text{non } Q(x) : " x \neq 0 "$$

$$\text{non } P(x) : " \exists \varepsilon > 0, x \geq \varepsilon "$$

Soit $x > 0$. Si $x \neq 0$, on peut poser $\varepsilon = x$. On a démontré

$$\text{non } Q(x) \Rightarrow \text{non } P(x)$$

et donc l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

Preuve par l'absurde

On suppose la négation de ce qu'on veut prouver^(P) et on arrive à quelque chose de faux.

$$(\text{non}(P) \rightarrow \text{FAUX})$$

C'est donc que P est vrai

Exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel

Preuve

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

De plus, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs (c'est le cas, on simplifie).

$$\text{On a } \sqrt{2}p = q \text{ donc } 2p^2 = q^2$$

Ainsi q^2 est pair, donc q est pair $q = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$2p^2 = (2n)^2 \quad p^2 = 2n^2 \text{ donc } p^2 \text{ est pair et } p \text{ est pair}$$

C'est "absurde" (on contredit ce qu'on a écrit plus haut).

On peut donc en déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve par contre-exemple

Pour démontrer qu'une assertion commençant par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un "contre-exemple".

Exemple
historiquement
important,
pas nécessaire
de le
comprendre
à fond