

Preuve par l'absurde

On suppose la négation de ce qu'on veut prouver^(P) et on arrive à quelque chose de faux.

$$(\text{non}(P) \rightarrow \text{FAUX})$$

C'est donc que P est vrai

Exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel

Preuve

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ ~~$\mathbb{Z}$~~ $q \in \mathbb{N}^*$

De plus, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs (ni c'est le cas, ou simplifier).

$$\text{On a } \sqrt{2}p = q \text{ donc } 2p^2 = q^2$$

Ainsi q^2 est pair, donc q est pair $q = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$2p^2 = (2n)^2 \quad p^2 = 2n^2 \text{ donc } p^2 \text{ est pair et } p \text{ est pair}$$

C'est "absurde" (on contredit ce qu'on a écrit plus haut).

On peut donc en déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve par contre-exemple

Pour démontrer qu'une assertion ~~ou~~ commençant par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un "contre-exemple".

On rappelle que

$\text{non}(\forall x \in E : P(x))$ a même valeur que $\exists x \in E : \text{non } P(x)$

Exemple : considérons l'énoncé

"toute fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable² en 0"

sa négation est

"il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et non dérivable en 0"

Cette négation est vraie : on peut considérer la fonction "valeur

Exemple
historiquement
important,
pas nécessaire
de le
comprendre
à fond

Preuve par récurrence

Permet de montrer un énoncé

$$" \forall n \geq n_0, P(n) \text{ est vrai } "$$

On distingue parfois la récurrence simple de la récurrence forte et la récurrence double

Récurrence classique

Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ est vrai

Hérédité : pour tout $n \geq n_0$, on montre l'implication
 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

On peut alors en conclure que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$

Récurrence forte

En Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ est vrai

Hérédité forte pour tout $n \geq n_0$, on montre l'implication
 $(\forall k \in \{n_0, n_0+1, \dots, n\} : P(k)) \Rightarrow P(n+1)$

On peut alors en conclure que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$

Récurrence double

Initialisation on vérifie que $P(n_0)$ et $\{P(n_0+1)\}$ sont vrais

Hérédité forte pour tout $n \geq n_0$, on montre l'implication
 $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

On peut alors en conclure que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$

Exemple : On définit une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n \end{cases}$$

~~On veut~~

Soit (P_n) la propriété " $1 \leq a_n \leq n^2$ "

$P(1)$ est vrai car $1 \leq a_1 \leq 1^2 = 1$

$P(2)$ est vrai car $a_2 = a_1 + \frac{2}{2} a_0 = 2$

$$1 \leq a_2 = 2 \leq 2^2 = 4$$

Soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vrais.

Alors
$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n \geq 1 + \frac{2}{n+2} \geq 1$$

$$a_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2}{(n+2)^2} n^2$$

a vérifier en exercice $\rightarrow$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n^2 + 2n + 1)(n+2) + 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 + n + 2n^2 + 4n + 2 + 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{n^3 + 6n^2 + 5n + 2}{n+2} \end{aligned}$$

$$(n+2)^2 = \frac{(n+2)^3}{n+2} = \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}{n+2}$$

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \geq n^3 + 6n^2 + 5n + 2 \quad (\text{la différence est } 7n + 6 \geq 0)$$

donc $a_{n+2} \leq (n+2)^2$ et $P(n+2)$ est vraie.

Par récurrence double, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

B2.1 Usages opérations et vocabulaire sur les fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

On définit alors

$$f+g: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{leur somme}$$

$$x \mapsto f(x)+g(x)$$

$$fg: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{leur produit}$$

$$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I , on définit

$$\frac{f}{g}: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{leur quotient}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Attention à ne pas confondre le produit $f \cdot g$
et la composition $f \circ g$.

Dérivée (sera repris au chapitre B5)

~~On dit~~ Soit I un intervalle, $x \in I$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
une fonction.

On dit que f est dérivable en x si la limite

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{existe ; elle est alors notée } f'(x)$$

On dit que f est dérivable sur I si
 $\forall x \in I, f$ est dérivable en x .

La fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée la dérivée de f .

On a les formules suivantes (prouvées au chapitre B5)

Soient I un intervalle, $x \in I$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux
 $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
fonctions dérivables en x .

① $f+g$ est dérivable en x et $\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$

② fg est dérivable en x et $\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

③ Si g ne s'annule pas sur I ,

$\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$

Cas particulier $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et
 $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}}$

En effet, une fonction constante est dérivable et de dérivée nulle.

Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $x \in I$,

$f: I \rightarrow J$ une fonction dérivable en x

$g: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $f(x)$

Alors la fonction $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x , et

$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))}$

Rstriction

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $J \subset I$ un sous-intervalle

et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction $J \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$ est appelée restriction de f à J
 et notée $f|_J$.

Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est

- majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) \leq M$ [M est un majorant de f]
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) \geq m$ [m est un minorant de f]
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque : f bornée $\Leftrightarrow |f|$ majorée

Fonctions ~~croiss~~ monotones

On dit qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est

- croissante (sur I) si $\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- strictement croissante (sur I) si $\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- décroissante (sur I) si $\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- strictement décroissante (sur I) si $\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(strictement) monotone (sur I) si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.