Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I

Semestre d'automne 2021-2022

Contrôle Final – Durée 120 min – le mardi 4 janvier 2022 – correction

Exercice 1. Polynômes.

1. Le théorème de division euclidienne de A par B s'énonce ainsi : il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficients réels vérifiant les deux conditions suivantes
   (a) $A = BQ + R$,
   (b) $\deg(R) < \deg(B)$

   (a) Si R est le reste de la division euclidienne de A par B, alors $\deg(R) < \deg(B) = 2$. Ainsi R est de degré ≤ 1, donc de la forme $R(X) = aX + b$ pour a et b dans $\mathbb{R}$

   (b) Puisque $A = BQ + R$, on a $A(2) = B(2)Q(2) + R(2)$. Comme $B(2) = 0$, il vient $R(2) = A(2) = (2-3)^{12} + (2-2)^6 - 2 = -1$. Un raisonnement analogue montre que $R(3) = A(3) = (3-3)^{12} + (3-2)^6 - 2 = -1$. Puisque $R(2) = 2a + b$ et $R(3) = 3a + b$, on en déduit que les réels a et b vérifient $2a+b = -1$ et $3a+b = -1$. En soustrayant ces deux équations, on obtient $a = 0$, puis $b = -1$.

2. On procède par double implication.
   $\Rightarrow$ Supposons $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$. Il est évident que $B(\alpha) = 0$. De plus, puisque $A = BQ + R$, on a $0 = A(\alpha) = B(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$. On a bien montré que $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.
   $\Leftarrow$ Supposons $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$. Il est évident que $B(\alpha) = 0$. De plus, puisque $A = BQ + R$, on a $A(\alpha) = B(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + 0 = 0$. On a bien montré que $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.

3. (a) Le polynôme dérivé de A est $A' = 3X^2 + p$. On pose la division euclidienne de A par A'

$$
\begin{array}{rrr|ll}
X^3 & +pX & +q & 3X^2 & +p \\
\cline{4-5}
-(X^3 & +\frac{p}{3}X) & & \frac{1}{3}X & \\
\cline{1-2}
 & \frac{2p}{3}X & +q & &
\end{array}
$$

   pour obtenir que le reste est $R(X) = \frac{2p}{3}X + q$ et le quotient $Q(X) = \frac{1}{3}X$.

   (b) Supposons que α est racine au moins double de A. Par un théorème du cours, on a donc $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$. D'après la question 2., on en déduit que $R(\alpha) = 0$. A l'aide de la forme de R calculée à la question 3., on a $\frac{2p}{3}\alpha + q = 0$, donc $\alpha = -\frac{3p}{2q}$.

   (c) On calcule $A(-\frac{3q}{p}) = -\frac{27q^3}{8p^3} - \frac{3q}{2} + q = -\frac{27q^3}{8p^3} - \frac{q}{2} = -\frac{q(27q^2+4p^3)}{8p^2}$. Pour montrer l'équivalence, on procède par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que A a une racine au moins double, que l'on note α. Par la question (b), on a $\alpha = -\frac{3q}{2p}$. On a donc
$$0 = A\left(-\frac{3q}{p}\right) = -\frac{q(27q^2+4p^3)}{8p^2}$$
   et donc $q = 0$ ou $27q^2 + 4p^3 = 0$. Si $q = 0$, alors $\alpha = 0$. Comme α est racine au moins double, on a $A'(0) = 0 = \frac{2p}{3}$, donc $p = 0$, ce qui est absurde. On a donc $q \neq 0$ et donc nécessairement $27q^2 + 4p^3 = 0$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $4p^3 + 27q^2 = 0$. Posons $\alpha = -\frac{3p}{2q}$. On calcule $A(\alpha) = -\frac{q(27q^2+4p^3)}{8p^2} = 0$ et $A'(\alpha) = 3\alpha^2 + p = 3\frac{9q^2}{4p^2} + p = \frac{27q^2+4p^3}{4p^2} = 0$, donc α est racine au moins double de P.

Exercice 2. Arithmétique.

1. On effectue l'algorithme d'Euclide
$$741 = 2 \times 351 + 39$$
$$351 = 9 \times 39 + 0$$
Le dernier reste non nul est 39, donc le PGCD de 741 et 351 est 39. Puisque $39 = 1 \times 741 - 2 \times 351$, le couple $(u, v) = (1, -2)$ est un couple de coefficients de Bézout pour $(741, 351)$.
2. Les entiers 19 et 25 sont premiers entre eux. On a $19 \times 25 = 475$. Par un théorème du cours («théorème chinois»), l'ensemble des solutions du système de congruences est de la forme $\{k_0 + 475\mathbb{Z}\}$ pour un $k_0 \in \mathbb{Z}$ à déterminer. Déterminons d'abord des coefficients de Bézout pour $(19, 25)$. On obtient (par tâtonnement, ou bien à l'aide de l'algorithme d'Euclide) la relation $4 \times 19 - 3 \times 25 = 1$. Si x est solution du système de congruences, alors $25x \equiv 7 \times 25 = 175 \mod 475$ et $19x \equiv 13 \times 19 = 247 \mod 475$. On a donc $x = 4 \times 19x - 3 \times 25x \equiv (4 \times 247 - 3 \times 175) \mod 475$, donc $x \equiv 463 \mod 475$. L'ensemble des solutions est donc $\{463 + 475\mathbb{Z}\}$.
Remarque : il était parfaitement correct, et plus rapide, de remarquer que $x = -12$ est une solution "évidente" du système

Exercice 3. Les complexes.

1. Le discriminant du trinôme est
$$\Delta = (1 - 3i)^2 - 4(-4 - 3i) = -6i - 8 + 16 + 12i = 8 + 6i$$
Cherchons les racines carrées complexes de $8 + 6i$ sous la forme $z = a + ib$. L'égalité des parties réelle et imaginaire de l'équation $z^2 = 8 + 6i$ donne les équations $a^2 - b^2 = 8$ et $2ab = 6$. L'égalité des modules donne $a^2 + b^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. On en déduit que $a^2 = 9$ et $b^2 = 1$, puis que les solutions sont $\pm(3 + i)$. Les solutions de l'équation de l'énoncé sont donc
$$\frac{-1 + 3i + (3 + i)}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad \frac{-1 + 3i - (3 + i)}{2} = -2 + i$$
2. Soit $z = x + iy$ avec x, y réels. La condition $\left|\frac{z-1}{z-4}\right| = 2$ équivaut à $|z - 1|^2 = 4|z - 4|^2$ ou encore à $4|z-4|^2 - |z-1|^2 = 0$. En développant, cette condition peut se réécrire sous les formes équivalentes suivantes
$$\begin{aligned} 4(x-4)^2 + 4y^2 - (x-1)^2 - y^2 &= 0 \\ 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2 &= 0 \\ 3x^2 - 30x + 3y^2 + 63 &= 0 \\ x^2 - 10x + y^2 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 - 25 + y^2 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc le cercle de centre le point $(5, 0)$ et de rayon 2.

Exercice 4. Suites.

1. (a) Puisque $x + y > 0$, l'inégalité demandée équivaut à l'inégalité $4xy \leq (x + y)^2$. Puisque $(x + y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$, cette inégalité est vraie.
   (b) Si $n = 0$, on a $u_0 = a \leq b = b_0$. Si $n > 0$, l'inégalité demandée est une conséquence immdiate du (a) appliqué à $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$.
2. (a) Soit n un entier. On a
$$w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2},$$
où on a utilisé les inégalités $0 \leq v_n - u_n \leq v_n + u_n$.

(b) Montrons par récurrence l'inégalité
$$w_n \leq \frac{b-a}{2^n} \tag{*}$$
pour tout entier n. L'inégalité (*) est vraie (c'est une égalité) pour $n = 0$. Supposons (*) vraie pour un entier n ; alors d'après la question (3a) on a $w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ et (*) est vraie pour l'entier $n+1$, ce qui termine la récurrence.
En utilisant la question (1b), on a $0 \leq w_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ pour tout entier n. Puisque les suites $(0)_n$ et $(\frac{b-a}{2^n})_n$ tendent vers 0, le théorème des gendarmes implique que (w_n) tend vers 0.

3. Soit n un entier. On a
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$
d'après la question (1b). La suite (v_n) est donc décroissante. On a également
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geq 0$$
d'après la question (1b). La suite (u_n) est donc croissante. D'après la queston (2), la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0. Le théorème des suites adjacentes permet d'affirmer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

4. Pour tout entier n, on a $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$. La suite $(u_n v_n)$ est donc constante, et égale à son premier terme $u_0 v_0 = ab$. Par ailleurs, elle converge vers ℓ^2 comme produit de deux suites convergentes. On en déduit $\ell^2 = ab$, donc $\ell = \sqrt{ab}$ car $\ell > 0$.

Exercice 5. Étude de fonctions.

1. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et s'annule uniquement en 1. On en déduit que $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

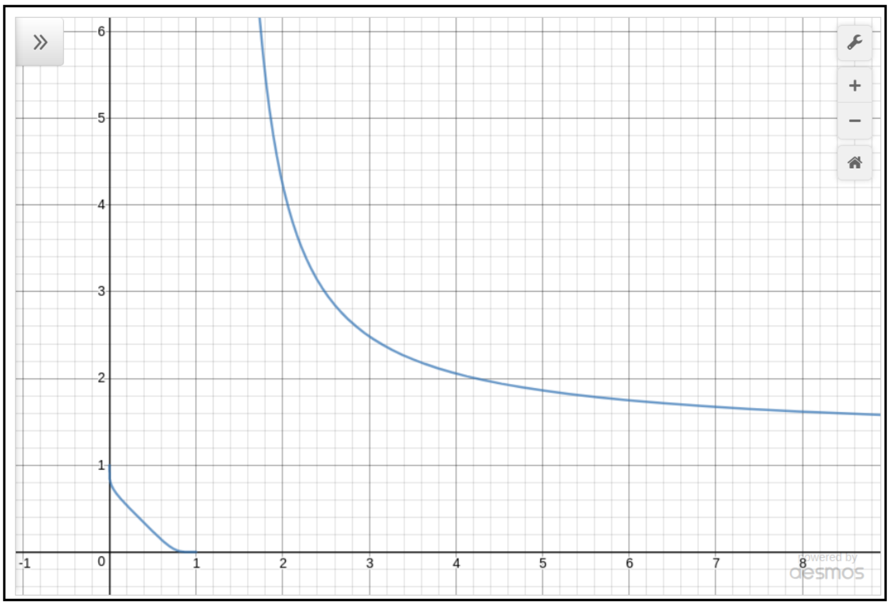
2. La fonction f est dérivable sur D_f comme composition et quotient de fonctions usuelles. On obtient, pour $x \in D_f$,
$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} e^{1/\ln x}$$
et on a donc $f(x) < 0$ pour tout x dans D_f.

3. Il faut étudier les limites en 0, 1 (à droite et à gauche) et $+\infty$.
   (a) en 0, on a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} 1/\ln(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
   (b) en 1 à gauche, on a $\lim_{x\to 1^-} 1/\ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.
   (c) en 1 à droite, on a $\lim_{x\to 1^+} 1/\ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
   (d) en $+\infty$, on a $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to +\infty} 1/\ln(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

4. On déduit des questions précédentes le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0 || $+\infty$	$\searrow$	1

5. Voici le graphe de f.



Il admet deux asymptotes

(a) la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale, puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(b) la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote vertictale, puisque $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$