Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I

Semestre d'automne 2021-2022

Contrôle Final – Durée 120 min – le mardi 4 janvier 2022

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte cinq exercices.

Exercice 1. Polynômes.

1. Soit A et B deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Enoncer le théorème de division euclidienne de A par B.
2. Dans cette question $A = (X-3)^{12} + (X-2)^6 - 2$ et $B = (X-3)(X-2)$. Soit R le reste de la division euclidienne de A par B.
   (a) Justifier que R est de la forme $R = aX + b$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $R(2)$ et $R(3)$, et déduire une expression des coefficients a et b de R.
3. On revient à la situation générale de la première question et on note R le reste de la division euclidienne de A par B.
   Soit α un réel. Montrer que $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ si et seulement si $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.
4. Soit $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que $A = X^3 + pX + q$.
   (a) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par A' (son polynôme dérivé).
   (b) On suppose que α est racine au moins double de A. Montrer que $\alpha = -\dfrac{3q}{2p}$.
   (c) En déduire que A a une racine au moins double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 2. Arithmétique.

1. Calculer $\mathrm{pgcd}(741, 351)$ et trouver des coefficients de Bézout associés aux entiers 741 et 351.
2. Donner toutes les solutions du système de congruences

$$x \equiv 7 \mod 19 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 13 \mod 25.$$

Exercice 3. Les complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$.
2. Donner l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z satisfait $\left|\dfrac{z-1}{z-4}\right| = 2$.

Exercice 4. Suites. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout entier n, on a $u_n \leqslant v_n$ (on pourra utiliser sans démonstration le fait que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier n).
2. Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que pour tout entier n on a $w_{n+1} \leqslant \dfrac{w_n}{2}$.
   (b) En déduire que la suite (w_n) tend vers 0.

Tourner la page, svp.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. En déduire qu'elles convergent vers le même nombre réel ℓ.
4. Déterminer ℓ (**Indication :** calculer $u_n v_n$).

Exercice 5. Étude de fonctions. On cherche à étudier la fonction

$$f(x) = e^{1/\ln x}.$$

1. Donner le domaine maximal de f, c'est-à-dire le plus grand ensemble de nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est défini, que l'on notera D_f.
2. Calculer la fonction dérivée de f et déterminer son signe.
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
4. Donner la table de variations de f.
5. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptotes.