
Examen final du 16 décembre 2020
Durée : 2 heures
Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Correction exercice 1.

1. Pour un entier n, on a
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{v_n - u_n}{6}$$
et donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 - u_0 = 5$.
2. Son terme général est donc, pour $n \in \mathbf{N}$,
$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n (v_0 - u_0) = \frac{5}{6^n}$$
3. Puisque $|1/6| < 1$, il découle de la question précédente que la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{5}{2 \cdot 6^n} \geqslant 0$$
et donc la suite (u_n) est croissante. On a aussi
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{5}{3 \cdot 6^n} \leqslant 0$$
et donc la suite (v_n) est décroissante. Nous avons donc vérifié les trois hypothèses (soulignées) permettant d'affirmer que les suties (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a
$$2u_{n+1} + 3v_{n+1} = (u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 2u_n + 3v_n.$$
La suite $(2u_n + 3v_n)$ est donc constante égale à $2u_0 + 3v_0 = 15$.
5. D'après le théorème des suites adjentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite que l'on notera ℓ. La suite $(2u_n + 3v_n)$ converge vers $2\ell + 3\ell = 5\ell$ et aussi vers 15 puisqu'elle est constante égale à 15. Par unicité de la limite d'une suite, on a $5\ell = 15$, d'où $\ell = 3$.

Correction exercice 2.

1. Rappelons d'abord que de tels u et v ne sont pas uniques : votre réponse peut être juste même si elle est différente de celle donnée ici. On peut deviner u et v par tâtonnement ou alors en remontant l'algorithme d'Euclide. On a $7 = 1 \times 5 + 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$, d'où $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7$, donc le choix $u = 3$, $v = -2$ convient.
2. Posons $x = 15u + 7v + 35k$ pour k entier. Puisque $15u$ et $35k$ sont divisbles par 5, donc congrus à 0 modulo 5, on a $x \equiv 7v \equiv 1 - 5u \equiv 1\,[5]$. De même, puisque $7v$ et $35k$ sont divisibles par 7, donc congrus à 0 modulo 7, on a $x \equiv 15u \equiv 3(1 - 7v) \equiv 3 - 3 \cdot 7u \equiv 3\,[7]$.
3. Soit x une solution du système (S). Il découle de la question précédente avec $k = 0$ que x_0 est aussi une solution du système (S). En faisant la soustraction des congruences, on obtient $x - x_0 \equiv 0\,[5]$ et $x - x_0 \equiv 0\,[7]$. Autrement dit, $x - x_0$ est divisible par 5 et par 7. Puisque 5 et 7 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique que $x - x_0$ est divisible par 35, donc $x \equiv x_0\,[35]$.

4. On a $x_0 = 15u + 7v = 15 \times 3 + 7 \times (-2) = 31$. D'après la question 3, toute solution x de (S) est congrue à 31 modulo 35. Réciproque, si x est congru à 31 modulo 35, il s'écrit $31 + 35k$ pour un entier $k \in \mathbf{Z}$ et est donc solution de (S) d'après la question 2. L'ensemble des solutions de (S) est donc l'ensemble des entiers congrus à 31 modulo 35.

Correction exercice 3

1. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme produit et composition de fonctions usuelles. On calcule, pour $x \in]1, +\infty[$,

$$f'(x) = 2(x-1)\ln(x-1) + \frac{(x-1)^2}{x-1} = (x-1)(1 + 2\ln(x-1))$$

2. On a

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)^2 = \lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty,$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

En 1, on a

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0, \qquad \lim_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$$

qui est une forme indéterminée. En posant $y = (x-1)^{-1}$, on a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(1/y)}{y^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y^2}$$

qui vaut 0 par le théorème des croissances comparées.

3. Pour $x \in]1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 + 2\ln(x-1)$. cette quantité s'annule pour $x_0 = 1 + \exp(-1/2)$; puisque la fonction ln est croissante, elle est négative sur $]1, x_0]$ et positive sur $[x_0, +\infty[$. On a donc le tableau suivant

x	1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Quel que soit le réel b, la fonction g est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. On a

$$\lim_{x \to 1, x < 1} g(x) = b \qquad \lim_{x \to 1, x > 1} g(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

Puisque g est continue en 0 si et seulement si ses limites à droite et à gauche existent et sont égales, on en conclut que g est continue si et seulement si $b = 0$.

Correction exercice 4

1. On cherche les racines d'un trinôme. Le discriminant vaut $\Delta = -3$. Les deux racines sont donc

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

que l'on peut écrire sous forme géométrique comme

$$\exp(2i\pi/3) \text{ et } \exp(-2i\pi/3).$$

2. Posons $y = x^2$. La condition $x^4 + x^2 + 1 = 0$ équivaut à $y^2 + y + 1 = 0$. Les racines de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ sont donc les nombres complexes vérifiant $x^2 = \exp(2i\pi/3)$ ou $x^2 = \exp(-2i\pi/3)$. Ce sont les 4 nombres complexes $\exp(i\pi/3)$, $-\exp(i\pi/3)$, $\exp(-i\pi/3)$ et $-\exp(-i\pi/3)$.

3. Dans $\mathbf{C}[X]$, on a

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - \exp(i\pi/3))(X + \exp(i\pi/3)(X - \exp(-i\pi/3))(X + \exp(-i\pi/3)).$$

On obtient la factorisarion dans $\mathbf{R}[X]$ en regroupant les racines réelles conjuguées :

$$(X - \exp(i\pi/3))(X - \exp(-i\pi/3)) = X^2 - (\exp(i\pi/3) + \exp(-i\pi/3))X + 1 = X^2 - X + 1$$

$$(X + \exp(i\pi/3))(X + \exp(-i\pi/3)) = X^2 + (\exp(i\pi/3) + \exp(-i\pi/3))X + 1 = X^2 + X + 1$$

La factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ est donc

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Exercice 4

Correction exercice bonus

On pouvait utiliser l'algorithme d'Euclide. Il est toutefois plus rapide de factoriser Q : c'est un trinôme de discrimant $\Delta = 9$ et de racines -1 et 2, donc $Q(X) = (X+1)(X-2)$. Puisque $P(-1) = 0$, P est divisible par $X + 1$; puisque $P(2) \neq 0$, P n'est pas divisbile par $X - 2$. Il s'ensuit que $\mathrm{PGCD}(P, Q) = X + 1$.