Examen final du 16 décembre 2020

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Exercice 1. (5 points)

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par récurrence de la manière suivante : $u_0 = 0$, $v_0 = 5$ et pour $n \in \mathbf{N}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. (1 point) Montrer que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. (1 point) En déduire la valeur de $v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. (1 point) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.
4. (1 point) Montrer que la suite $(2u_n + 3v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante.
5. (1 point) Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 2. (5 points)

On considère le système (S) de congruences ci-après, pour $x \in \mathbf{Z}$

$$\begin{cases} x \equiv 1 [5] \\ x \equiv 3 [7]. \end{cases}$$

1. (1,5 point) Déterminer des entiers relatifs u et v tels que $5u + 7v = 1$.
2. (1,5 point) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $x = 15u + 7v + 35k$ est solution du système (S).
3. (1 point) On pose $x_0 = 15u + 7v$. Montrer que si x est solution du système (S), alors $x \equiv x_0 [35]$.
4. (1 point) Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \in]1, +\infty[$ par la formule

$$f(x) = (x - 1)^2 \ln(x - 1).$$

1. (1,5 point) Justifier brièvement pourquoi f est dérivable sur $]1, +\infty[$, puis calculer sa dérivée.
2. (1,5 point) Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

3. (1 point) Dresser le tableau de variation de f .
4. (1 point) Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 1 \\ b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer le réel b tel que g soit continue sur $\mathbf{R}$.

Tournez la page

Exercice 4 (5 points)

- (1,5 point) Déterminer les deux solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $y^2 + y + 1 = 0$.
- (1,5 point) A l'aide du changement de variable $y = x^2$, déterminer les quatre solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
- (2 points) Donner la factorisation du polynôme $X^4 + X^2 + 1$
 - en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$,
 - en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice bonus (3 points)

Calculer le PGCD des polynômes P et Q définis par

$$P(X) = X^3 + 1, \quad Q(X) = X^2 - X - 2.$$