Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2020–2021**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 23 octobre 2020

Correction

Exercice 1.

Une solution est de calculer les tableaux de vérité de «$(P$ et $Q) \Longrightarrow R$» et «$(P \Longrightarrow R)$ ou $(Q \Longrightarrow R)$», puis de constater qu'ils coïncident.

Voici une autre solution possible : puisque «$X \Longrightarrow Y$» équivaut à «non(X) ou Y», on en déduit que «$(P$ et $Q) \Longrightarrow R$» équivaut à «non$(P$ et $Q)$ ou R» ou encore à «non(P) ou non(Q) ou R».

De même, «$(P \Longrightarrow R)$ ou $(Q \Longrightarrow R)$ » équivaut à « (non(P) ou R) ou (non(Q) ou R)» ou encore à «non(P) ou non(Q) ou R».

On en déduit que «$(P$ et $Q) \Longrightarrow R$» équivaut à «$(P \Longrightarrow R)$ ou $(Q \Longrightarrow R)$»

Exercice 2.

1. Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrons l'inclusion $B \subset C$. Pour cela, soit $x \in B$. Comme $B \subset A \cup B$, on a

$$x \in (A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$$

donc $x \in C$. On a donc montré $B \subset C$. Puisque les ensembles B et C jouent un rôle symétrique (les hypothèses ne changent pas si on échange B et C), l'inclusion $C \subset B$ se montre de la même façon. Ces deux inclusions impliquent l'égalité $B = C$

2. Posons $C = \overline{A}$. Puisque $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$, le résultat de la question précédente devient : « si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $B = \overline{A}$ ». On conclut en remarquant que $B = \overline{A}$ implique $\overline{B} = \overline{\overline{A}} = A$. Ainsi $A = \overline{B}$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On obtient en réduisant le membre de droite au même dénominateur

$$\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} = \frac{(4n+2)-(4n-2)}{(4n-2)(4n+2)} = \frac{4}{2(2n+1)2(2n-1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

2. C'est une somme téléscopique. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-6} + \frac{1}{4n-2} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} = \frac{(2n+1)-1}{4n+2} = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, $S_{100} = \frac{100}{201}$.

Exercice 4.

1. Montrons que f est injective. Pour cela, soient m et n deux entiers vérifiant $f(m) = f(n)$. On a donc $m^3 + m = n^3 + n$, donc $0 = n^3 - m^3 + n - m = (n-m)(n^2 + nm + m^2) + (n-m) = (n-m)(n^2 + nm + m^2 + 1)$. Puisque $n^2 + nm + m^2 + 1 \geq 1 > 0$, on en déduit que $n - m = 0$, donc $m = n$. Cela montre que f est injective.

   Une autre solution consistait à montrer que f est strictement croissante, donc injective.

2. Montrons que f n'est pas surjective. Voici un argument possible, mais il y en a beaucoup d'autres. Remarquons que pour tout entier n, n^3 a la même parité que n et donc $f(n)$ est pair (comme somme de deux entiers impairs). Par conséquent, il n'existe pas d'entier n tel que $f(n) = 1$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit P_n l'énoncé «$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$».

Montrons d'abord que P_1 est vrai. On a

$$\sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1! = 1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

et donc P_1 est vrai. Supposons maintenant que P_n est vrai pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \left(\sum_{k=1}^{n} k \times k!\right) + (n+1) \times (n+1)! = \Big((n+1)! - 1\Big) + (n+1) \times (n+1)!$$

où la dernière égalité utilise P_n. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

et donc P_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 6.

1. Le domaine de définition de f est le même que celui de ln, c'est-à-dire $]0, +\infty[$. $D_f =]0, +\infty[$.
2. La fonction f est dérivable $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$. On calcule $f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} = \frac{4(x^4-1)}{x}$. On a donc $f'(x) = 0 \iff x^4 - 1 = 0 \iff (x^2-1)(x^2+1) = 0 \iff (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$. Puisque $x + 1 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$, la seule solution de l'équation $f'(x) = 0$ est donc $x = 1$. Ainsi, le seul point où le graphe de f admet une tangente horizontale est le point $(1, f(1)) = (1, 1)$.
3. Soit $x > 0$. On calcule $f''(x) = 12x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 0$. Ainsi, f'' est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.

1. Soit $x \in [-\pi, \pi]$. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée, on a $f'(x) = \frac{2}{3}\cos(x)e^{\frac{2}{3}\sin(x)}$.
2. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f'(x)$ est du même signe que $\cos(x)$ (puisque exp est à valeurs positives), donc négative sur $[-\pi, -\pi/2]$, positive sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et négative sur $[\pi/2, \pi]$. Le tableau de variations de f est donc

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$e^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	1

3. Soit $x \in [-\pi, \pi]$. On calcule

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\sin(x)e^{\frac{2}{3}\sin(x)} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}(\cos(x))^2 e^{\frac{2}{3}\sin(x)} = \frac{2}{9}\left(2\cos^2(x) - 3\sin(x)\right)e^{\frac{2}{3}\sin(x)}.$$

4. Résolvons d'abord l'équation $2X^2 + 3X - 2 = 0$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 = 5^2$, donc les racines sont $\frac{-3-5}{4}$ et $\frac{-3+5}{4}$, c'est-à-dire -2 et $\frac{1}{2}$. Soit maintenant $x \in [-\pi, \pi]$ solution de $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$. Si on pose $X = \sin(x)$, alors $2X^2 + 3X - 2 = 0$ et donc $X \in \{-2, \frac{1}{2}\}$, donc $X = \frac{1}{2}$ car la fonction sinus est à valeurs dans $[-1, 1]$. On en déduit que $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$. Réciproquement, $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$ sont bien solutions de $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

5. Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Alors $f''(x)$ est du signe de $2\cos^2(x) - 3\sin(x) = -(2\sin^2 x + 3\sin x - 2) = -2(\sin(x) + 2)(\sin(x) - \frac{1}{2}) = 2(\sin(x) + 2)(\frac{1}{2} - \sin(x))$, donc $f''(x)$ est du signe de $\frac{1}{2} - \sin(x)$. Ainsi f'' est positive sur $[-\pi, \frac{\pi}{6}]$, négative sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ et positive sur $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$.
Ainsi f'' s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\pi}{6}$. Donc les points $(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})) = (\frac{\pi}{6}, e^{\frac{1}{3}})$ et $(\frac{5\pi}{6}, f(\frac{5\pi}{6})) = (\frac{5\pi}{6}, e^{\frac{1}{3}})$ sont les points d'inflexion de f.