Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2020–2021**

L1 — UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 23 octobre 2020

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Exercice 1. Soient P, Q, R des propositions. Montrer :
$(P \;\; et \;\; Q) \Longrightarrow R$ équivaut à $(P \Longrightarrow R) \;\; ou \;\; (Q \Longrightarrow R)$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble non vide E. Si X est une partie de E, la notation $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E.

1. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$.
2. En déduire que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $A = \overline{B}$.

Exercice 3.

1. Montrer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ l'identité $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{4n+2}$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.
3. Écrire S_{100} sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ l'application définie par $f(n) = n^3 + n$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

Exercice 5. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \mapsto x^4 - 4 \ln x$.

1. Sur quel intervalle de $\mathbf{R}$ la fonction f est-elle bien définie ?
2. Déterminer les points où le graphe de f admet une tangente horizontale.
3. Préciser la convexité/concavité de la courbe de f en fonction de x.

Exercice 7. On considère la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{2}{3} \sin x}$.

1. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f.
3. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, calculer $f''(x)$.
4. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$: $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.
5. Déterminer les points d'inflexion de f.