
Contrôle continu 1

Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ définis par $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$. On s'intéresse à l'ensemble $V = \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, z') = Q(z, z') = 0\}$.
En utilisant le résultant de P et Q vus dans $A[Y]$ avec $A = \mathbb{Q}[X]$, déterminer V.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. En utilisant un résultant, déterminer un polynôme R dont les racines sont les $a + b$ avec a racine de P et b racine de Q dans $\overline{\mathbb{K}}$.
On s'intéressera à l'ensemble des $y \in \overline{\mathbb{K}}$ tels que le système suivant ait une solution dans $\overline{\mathbb{K}}$: $P(X) = Q(y - X) = 0$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension algébrique, de degré fini ou infini. Soit $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ un $\mathbb{K}$-morphisme de corps (i.e. un morphisme tel que $\sigma_{|\mathbb{K}}$ est l'identité). Le but est de montrer que σ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme.
Soit $\alpha \in \mathbb{L}$ et soit $A \subset \overline{\mathbb{K}}$ l'ensemble de ses conjugués.

1. Montrer que $\sigma(A) = A$.
2. Conclure.

Exercice 4. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(j, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(j\sqrt{5})$. On note $\mathbb{K}$ ce corps.
2. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.
3. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ et un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\deg P < \deg Q$ tels que $\mathbb{K}$ soit le corps de décomposition de P et le corps de rupture de Q (le plus petit des corps de rupture à isomorphisme près).

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes irréductibles. Soit a une racine de P, et b une racine de Q.
Notons $\mathbb{L}_P$ et $\mathbb{L}_Q$ les corps de décompositions de P et Q (dans $\overline{\mathbb{K}}$).

1. Montrer l'implication : $\mathbb{K}[a] = \mathbb{K}[b] \Longrightarrow \mathbb{L}_P = \mathbb{L}_Q$.
   On commencera par montrer qu'une inclusion entraine une inclusion.
2. Donner un exemple montrant que l'implication précédente n'est pas une équivalence.

Exercice 6.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\mathbb{K}(\sqrt{\alpha}) = \mathbb{K}(\sqrt{\beta}) \iff \frac{\beta}{\alpha} \text{ est un carré dans } \mathbb{K}.$$

2. Déterminer le degré des extensions suivantes : $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.
3. Justifier les inclusions suivantes :

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(i+\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(i,\sqrt{2}).$$

4. Montrer que $\mathbb{Q}(i+\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$.
   On pourra procéder par l'absurde et montrer que sinon, on aurait $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5. Quel est l'ordre du groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mathrm{i}+\sqrt{2})/\mathbb{Q})$? Déterminer tous ses éléments.
6. En utilisant l'exercice 2, on déterminera le polynôme minimal de $i+\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 7.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible de degré ≥ 2.
   Soient a et b deux racines distinctes de P. Montrer que $a-b$ n'appartient pas à $\mathbb{K}$.
   On pourra considérer le $\mathbb{K}$*-morphisme* $\mathbb{K}[a] \to \overline{\mathbb{K}}$ *qui envoie* a *sur* b *; et considérer ses itérés.*
2. Donner un contre-exemple en caractéristique p.