Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

MG1 - Algèbre commutative Durée : 2h

Contrôle no 1

Tout résultat doit être justifié même si l'énoncé ne le précise pas explicitement.

Exercice 1. Soient $\mathbf{k}$ un corps et Ω une clôture algébrique de $\mathbf{k}$. Soit $P \in \mathbf{k}[X]$ un polynôme de degré $m \geq 1$ et soit $\alpha \in \Omega$ une racine de P.

1. Montrer que $[\mathbf{k}(\alpha) : \mathbf{k}]$ divise m.
   Montrer que $[\mathbf{k}(\alpha) : \mathbf{k}] = m$ si et seulement si P est irréductible sur $\mathbf{k}$.
2. Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbf{k}$ de degré n.
   On suppose que P est irréductible sur $\mathbf{k}$ et que m et n sont premiers entre eux. Montrer alors que P est irréductible sur $\mathbb{L}$.
3. Soit α une racine de $P = X^{11} + 4X + 2$. Montrer que $Q = X^{17} + 25X^8 + 10X^2 - 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.
4. Montrer que le résultat de la question 2 est faux en général si m et n ne sont pas premiers entre eux.
   Indication : on pourra utiliser le polynôme $X^4 - 2$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{L}/\mathbf{k}$ une extension de corps. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $[\mathbb{L} : \mathbf{k}]$ est finie.

(ii) Il existe une partie finie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\mathbb{L}$ telle que $\mathbb{L} = \mathbf{k}(a_1, \ldots, a_n)$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$, a_i est algébrique sur $\mathbf{k}$.

Exercice 3.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ainsi qu'une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Même question avec $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ sur $\mathbb{Q}$.
3. De même, déterminer le degré et une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$
4. L'inclusion $\mathbb{Q}(\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$ est-elle une égalité ?

Tournez la page SVP

Exercice 4. Étant donné $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $V(P) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(z_1, \ldots, z_n) = 0\}$ le lieu des zéros de P.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que $V(P) \subseteq V(Q)$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que Q^N soit multiple de P.

Remarque : ce résultat est un cas particulier d'un résultat qu'on appelle le théorème des zéros de Hilbert et qu'on verra plus tard dans ce cours.

1. Montrer que si la fonction polynomiale $f_P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ associée à P est nulle alors P est nul.
2. Dans cette question, on suppose que P est irréductible (donc non constant) et sans perte de généralité on suppose que le degré de P en X_n n'est pas nul.
   Soit $R \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ le résultant de P et Q vus dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$.
   (a) Par l'absurde, on suppose que R est non nul. Montrer alors qu'il existe $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $R(z_1, \ldots, z_{n-1}) \neq 0$ et le polynôme $P(z_1, \ldots, z_{n-1}, X_n) \in \mathbb{C}[X_n]$ admette une racine. Conclure que c'est absurde.
   (b) En déduire que P divise Q.
3. Dans cette question P n'est pas supposé irréductible.
   (a) Justifier que si P_i est un facteur irréductible de P alors $V(P_i) \subseteq V(P)$.
   (b) Utiliser la question 2 pour montrer le résultat annoncé au début de l'exercice.