Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

MG1 - Algèbre commutative Durée : 1h30

Contrôle no 1

Tout résultat doit être justifié même si l'énoncé ne le précise pas explicitement.

Exercice 1. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension finie de corps. Montrer qu'elle est algébrique.

Exercice 2. On note $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $x_i = \ln(p_i)$. Montrer par l'absurde que la famille des x_i est libre sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ n'est pas fini.

Exercice 3.

1. Montrer que $\sqrt{10+3\sqrt{7}}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.
2. Est-ce que $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?

Exercice 4. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{F}_3[X]/\langle X^2+2X+2\rangle$ est un corps isomorphe à $\mathbb{F}_9$.

Exercice 5. Soit T une indéterminée. Soit $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(T)$ (corps des fractions de $\mathbb{Q}[T]$).
On considère les sous-corps de $\mathbb{L}$ suivants : $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $\mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$.

1. Montrer que les extensions $\mathbb{L}/\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{L}/\mathbb{K}_2$ sont algébriques.
2. Déterminer $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$.
3. Montrer que l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ n'est pas algébrique.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[T]$ tels que $P_2 \neq 0 \neq Q_2$ et P_1 et P_2 sont premiers entre eux, et idem pour Q_1 et Q_2.
Soient $P = \frac{P_1}{P_2},\ Q = \frac{Q_1}{Q_2} \in \mathbb{K}(T)$ et $\pi = \{t \in \mathbb{K} \mid P_2(t)Q_2(t) = 0\}$.
On considère $\gamma : \mathbb{K} \smallsetminus \pi \to \mathbb{K}^2$ définie par $\gamma(t) = (P(t), Q(t))$. L'image de γ est une courbe rationnelle notée $C(P,Q)$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X,Y]$ tel que $C(P,Q) \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid R(x,y) = 0\}$.
   Indication : On cherchera à exprimer R comme le résultant de deux polynômes dans $\mathbb{K}[X,Y][T]$.
2. Application : Trouver $R = R(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ dans le cas où $P(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ et $Q(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.