## Ex. 1 Voir le cours

## Ex. 2

On suppose la famille liée donc il existe $p_1, \dots, p_n$ premiers et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ tous non nuls tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(p_i) = 0$. D'où $\ln(p_1^{\lambda_1} \cdots p_n^{\lambda_n}) = 0$

D'où $p_1^{\lambda_1} \cdots p_n^{\lambda_n} = 1$. On écrit $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $b_i \in \mathbb{N}$. On obtient $p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} = p_1^{b_1} \cdots p_n^{b_n}$

Quitte à réindexer, on peut supposer que $b_1, \dots, b_m < 0$ et $b_{m+1}, \dots, b_n > 0$. On écrit alors :

$$p_1^{a_1-b_1} \cdots p_m^{a_m-b_m} p_{m+1}^{a_{m+1}} \cdots p_n^{a_n} = p_{m+1}^{b_{m+1}} \cdots p_n^{b_n}$$

Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, on obtient $\forall i \geq m+1$, $a_i = b_i$ d'où $\frac{a_i}{b_i} = 1$

~~D'où~~ ce qui donne $p_1^{a_1-b_1} \cdots p_m^{a_m-b_m} = 1$

D'où $\forall i = 1, \dots, m$ $a_i - b_i = 0$ ce qui est absurde car $a_i \geq 0$ et $-b_i > 0$.

## Ex 3

1) Par l'absurde on suppose $\sqrt{10+3\sqrt{7}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$

Cela entraine l'existence de $a, b \in \mathbb{Q}$ tq

$$\sqrt{10+3\sqrt{7}} = a + b\sqrt{7}$$

D'où $10 + 3\sqrt{7} = a^2 + 2ab\sqrt{7} + 7b^2$

D'où $a^2 + 7b^2 = 10$ et $ab = \frac{3}{2}$

On voit que $b \neq 0$ car sinon $10 + 3\sqrt{7} = a^2$ entraine $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors $a = \frac{3}{2b}$ et on obtient

$$\left(\frac{3}{2b}\right)^2 + 7b^2 = 10 \text{ d'où } \frac{3}{4} + 7b^4 = 10b^2$$

donc $b^2$ est solution de $7X^2 - 10X + \frac{3}{4} = 0$

dont le discriminant : $\Delta = 100 - 28 = 72 = 4 \times 9 \times 2$

Les solutions sont $b^2 = \frac{10 - 6\sqrt{2}}{14}$ ou $b^2 = \frac{10+6\sqrt{2}}{14}$

ce qui entraine $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ absurde.

2) On peut faire comme au 1 et trouver $a$ et $b$ qui fonctionnent. On peut aussi remarquer que : $6 + 4\sqrt{2} = 4 + 2 \times 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
$= (2 + \sqrt{2})^2$ ce qui entraine

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

## Ex 4

$X^2 + 2X + 2 = P(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_3$ (on calcule $P(0), P(1), P(2)$) ce qui entraine que $P$ est irréductible. On en déduit que $\mathbb{F}_3[X]/\langle P \rangle$ est un corps. De plus $\deg(P) = 2$ donc $\dim(\mathbb{F}_3[X]/\langle P \rangle) = 2$ en tant que $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel. D'où $\mathbb{F}_3[X]/\langle P \rangle \simeq (\mathbb{F}_3)^2$ donc $\mathrm{card}(\mathbb{F}_3[X]/\langle P \rangle) = 9$

## Ex 5

1) Pour $\mathbb{L}/\mathbb{K}_1$ il suffit de montrer que $T$ est algébrique sur $\mathbb{K}_1$ et c'est le cas car $T$ est ~~solution~~ racine de $X^2 - T^2 \in \mathbb{K}_1[X]$.

De même : $T$ est solution de $X^2 - X - (T^2 - T) = 0$

2) On a $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2 \supseteq \mathbb{Q}$. Montrons l'inclusion $\subseteq$

Soit $f \in \mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$. Il existe $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \boxed{\mathbb{Q}[T]}$

tq $f = \dfrac{P_1(T^2)}{P_2(T^2)} = \dfrac{Q_1(T^2 - T)}{Q_2(T^2 - T)}$

On peut choisir $P_1$ et $P_2$ premiers entre eux et idem pour $Q_1, Q_2$. Ainsi $P_1(T^2)$ et $P_2(T^2)$ sont premiers entre eux et idem pour $Q_1(T^2-T)$ et $Q_2(T^2 - T)$. On a : $P_1(T^2)Q_2(T^2-T) = P_2(T^2)Q_1(T^2-T)$

$P_1(T^2)$ divise le membre de droite et est premier avec $P_2(T^2)$ donc divise $Q_1(T^2 - T)$.

De même on montre que $Q_1(T^2 - T)$ divise $P_1(T^2)$

Par conséquent $\exists\, c \in \mathbb{Q}$ tq $Q_1(T^2 - T) = c\, P_1(T^2)$

Ecrivons $Q_1 = b_m T^m + b_{m-1} T^{m-1} + \dots + b_0$

$P_1 = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_0$

On a alors :

$$b_m(T^2 - T)^m + b_{m-1}(T^2 - T)^{m-1} + \dots + b_0 \overset{c\times(}{=} a_n T^{2n} + a_{n-1} T^{2n-2} + \dots + a_0)$$

Ainsi à gauche on a :

$b_m(T^2 - T)^m$ + termes de deg $\leq 2m - 2$

et à droite : $c\, a_n T^{2n}$ + termes de deg $\leq 2n - 2$

Quand on compare les degrés on a déjà : $n = m$

De plus ; à gauche on a :

$$b_m\left(T^{2m} - n T^{2n-1}\right) + \text{termes de deg} \leq 2n-2$$

et à droite : $c\, a_n T^{2n}$ + termes de deg $\leq 2n - 2$

Ainsi le terme $-n b_n T^{2n-1}$ n'apparait pas à droite ce qui montre que $P_1$ et $Q_1$ sont des polynômes constants. ie $P_1 \in \mathbb{Q}$.

On fait de même avec $P_2$ et $Q_2$ et on obtient $P_2 \in \mathbb{Q}$. Finalement $f \in \mathbb{Q}$.

3) $\mathbb{Q}(T)/\mathbb{Q}$ n'est pas algébrique car $T$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$.

En effet $a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$ (avec $a_i \in \mathbb{Q}$) n'est nul que si tous les $a_i$ sont nuls

Ex 6

1) Soit $R = R(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ le résultant de $A(T) = P_1(T) - X P_2(T)$ et de

$B(T) = Q_1(T) - Y Q_2(T)$.

Soit $(a, b) \in C(P, Q)$. Alors $\exists t \in \mathbb{K}$ tel que $(a, b) = \left( \frac{P_1(t)}{P_2(t)}, \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \right)$ i.e tel que

$$\begin{cases} P_1(t) - a P_2(t) = 0 \\ Q_1(t) - b Q_2(t) = 0 \end{cases}$$

Notons $\alpha(T) = P_1(T) - a P_2(T)$

$\beta(T) = Q_1(T) - b Q_2(T)$

Remarquons que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[T]$ alors que $A, B \in \mathbb{K}[X, Y][T]$.

En fait $A_{|(X,Y)=(a,b)} = \alpha$ et $B_{|(X,Y)=(a,b)} = \beta$

$\alpha$ et $\beta$ ont une racine commune, à savoir $t$, donc le résultant de $\alpha$ et $\beta$ est nul.

(*) Mais ce résultant est égal à $R(a, b)$

donc $R(a, b) = 0$.

(*) En effet $\text{Résultant}(A, B)_{|(X,Y)=(a,b)}$

$= \text{Résultant}(A_{|(X,Y)=(a,b)}, B_{|(X,Y)=(a,b)})$

2) Je ne détaille pas les calculs.

On obtient une matrice $4 \times 4$ dont le déterminant est :

$$R(X, Y) = X^2 + Y^2 - Y$$