Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

MG1 - Algèbre commutative Durée : 1h45

Contrôle no 2

Tout résultat doit être justifié même si l'énoncé ne le précise pas explicitement.

Exercice 1. Soit $E = \{(z, e^z) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\}$. Montrer que E n'est pas un ensemble algébrique affine de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 2. Soit $\mathbf{k}$ un corps et $n \geq 1$ un entier. On identifie $M_n(\mathbf{k})$ à $\mathbf{k}^{n^2}$. Soit r un entier tel que $0 \leq r \leq n$. Montrer que $E = \{A \in M_n(\mathbf{k}) \mid \mathrm{rang}(A) \leq r\}$ est un ensemble algébrique affine.

Exercice 3.

1. Soit $(E_j)_{j\in J}$ une famille de parties de $\mathbf{k}^n$. Montrer que $I(\bigcup_{j\in J} E_j) = \bigcap_{j\in J} I(E_j)$.
2. Ici $\mathbf{k}$ est supposé algébriquement clos. Soit $I \subseteq \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal.
   Soit $\Gamma = \{m \mid m \subset \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ idéal maximal contenant $I\}$.
   Montrer que $\sqrt{I} = \bigcap_{m\in\Gamma} m$

Exercice 4.

1. Soit $\psi : \mathbb{C}[X, Y, Z] \to \mathbb{C}[T]$ l'unique morphisme d'algèbres[1] tel que $\psi(X) = T^3$, $\psi(Y) = T^4$ et $\psi(Z) = T^5$.
   Notons $J = \ker(\psi)$. Justifier que $\mathbb{C}[X, Y, Z]/J$ est intègre.
2. Soit $V \subset \mathbb{C}^3$ défini par $V = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\}$.
   Soit I l'idéal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ engendré par $\{X^4 - Y^3,\ X^5 - Z^3,\ Y^5 - Z^4\}$.
   (a) Montrer que $V \subseteq V(J)$.
   (b) Montrer que $V(J) \subseteq V(I)$.
   (c) Montrer que $V(I) \subseteq V$.
   (d) En déduire que V est un ensemble algébrique affine et qu'il est irréductible.

Exercice 5. Soit $p \geq 3$ un nombre premier et soit $\xi = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

1. Jusitifier que l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$ est d'ordre $p - 1$.
2. Via la correspondance de Galois, justifier qu'il existe une unique sous-extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$ telle que $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{L}] = 2$.
3. Montrer les inclusions : $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{p})) \subseteq \mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$.
4. Montrer que $\xi^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{p})\xi + 1 = 0$ et déterminer l'ordre $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{p}))]$.
5. Déduire de ce qui précède les égalités suivantes : $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{p}))$.

---

1. On rappelle qu'un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\psi : A \to B$ est défini par $\psi(1_A) = 1_B$, $\psi(aa') = \psi(a)\psi(a')$ et $\psi(\lambda a + a') = \lambda\psi(a) + \psi(a')$ pour tout $(a, a', \lambda) \in A \times A \times \mathbb{K}$.

Une correction du CC2

Exercice 1.
Par l'absurde soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $E \subset V(P)$. Écrivons $P = \sum c_j(X)Y^j$ avec $c_j \in \mathbb{C}[X]$. Alors pour tout $z \in C$, $P(z, e^z) = 0$ donc en particulier pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t, e^t) = 0$. Soit d le degré de P en Y. Remarquons que $d \geq 1$ (sinon $c_0(t) = 0$ pour tout t). On a : $P(t, e^t) = e^{dt} \cdot (\sum_0^d c_j(t)e^{(d-j)t})$. Quand $t \to +\infty$, $P(t, e^t)$ a la même limite que $c_d(t)e^{dt}$ qui est infini d'où l'absurdité.

Exercice 2.
On travaille dans $R = \mathbf{k}[X_{ij}; (i,j) \in \{1, \dots, n\}]$. On considère tous les mineurs de taille $> r$; on note S leur ensemble. Un tel mineur est un polynôme de R en tant que déterminant. Une matrice est de rang $\leq r$ si et seulement elle annule les éléments de S. Autrement dit, $E = V(S)$ est un bien un ensemble algébrique affine.

Exercice 3.

1. C'est facile, je ne le fais pas.
2. Pour tout $m \in \Gamma$ on a $I \subset m$ d'où $\sqrt{I} \subset \sqrt{m} = m$ (car m est maximal donc radical). Par conséquent $\sqrt{I}$ est inclus dans l'intersection des $m \in \Gamma$. Voyons l'inclusion inverse. On a $V(I) = \bigcup_{a \in V(I)} \{a\}$. On applique la question 1 : $\sqrt{I} = I(V(I)) = \cap_a I(\{a\})$. D'après le cours, $I(\{a\})$ est maximal et tout idéal maximal est de cette forme (car $\mathbf{k}$ est algébriquement clos) d'où le résultat voulu.

Exercice 4.

1. L'anneau $\mathbb{C}[X,Y,Z]/J$ est isomorphe à l'image de ψ qui est un sous-anneau de $\mathbb{C}[T]$. Ce dernier est intègre donc $\mathbb{C}[X,Y,Z]/J$ aussi.
2. (a) C'est facile, je ne le fais pas.
   (b) On a $\psi(X^4 - Y^3) = (T^3)^4 - (T^4)^3 = 0$ donc $X^4 - Y^3 \in J$. De même $X^5 - Z^3$ et $Y^5 - Z^4$ appartiennent à J. D'où $I \subseteq J$ d'où $V(J) \subseteq V(I)$.
   (c) Soit $p = (x, y, z) \in V(I)$. Si $x = 0$ alors $p = (0,0,0) \in V$. On suppose donc $x \neq 0$. Cela entraine $y \neq 0$ et $z \neq 0$. On pose $t = y/x$. On a alors $t^3 = y^3/x^3 = x^4/x^3 = x$. De plus, $t^4 = y^4/x^4 = y^4/y^3 = y$ et $t^5 = y^5/x^5 = z^4/z^3 = z$. Ainsi $p = (t^3, t^4, t^5) \in V$.
   (d) On a donc $V = V(J)$ (c'est donc un EAA) or J est premier par la question 1 donc V est irréductible.

Exercice 5.

1. Par le cours, c'est une extension cyclotomique avec $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$, elle est donc d'ordre $\varphi(p) = p - 1$.
2. Notons $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$. Alors 2 divise l'ordre de G. Il existe donc un unique sous-groupe d'ordre 2 dans G, qu'on note H. Par conséquent $\mathbb{Q}(\xi)^H$ est une sous-extension telle que $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}(\xi)^H] = |\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}(\xi)^H)| = |H| = 2$ et elle est unique par la correspondance de Galois (car une autre donnerait lieu à un autre sous-groupe de G d'ordre 2).
3. On a $\cos(2\pi/p) = (\xi + \bar{\xi})/2 \in Q(\xi)$ d'où les inclusions $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p)) \subseteq \mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$.
4. Je laisse le calcul qui donne 0. Cela permet de dire que ξ est racine d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))[X]$. Cela entraîne $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{p}))] \leq 2$. Si c'était 1 alors on aurait l'égalité $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{p}))$ et cela impliquerait que $\xi \in \mathbb{R}$; l'odre demandé est donc 2.
5. Par unicité dans la question 2, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))$. D'autre part $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R}]$ est 1 ou 2 (par la question 3) mais ce n'est pas 1 sinon $\xi \in \mathbb{R}$. Par conséquent $\mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R} = \mathbb{L}$ également.