Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2019-2020

MG1 - Algèbre commutative — Durée : 2h + 30 min.

Contrôle no 2

Tout résultat doit être justifié même si l'énoncé ne le précise pas explicitement.

Exercice 1.

a) Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{Q}$ et toutes ses racines.

b) Montrer que son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et donner un générateur.

Exercice 2. Soit $P(X) = \frac{X^4}{4!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^2}{2} + X + 1$.

a) Montrer que le polynôme est premier avec son polynôme dérivé. En déduire que $P(X)$ a 4 racines complexes distinctes x_1, x_2, x_3, x_4 *(on ne demande pas de les calculer)*.

b) On pose $\Delta = (x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_1-x_4)^2$. Calculer Δ. *(Indication : vérifier que $\Delta = 24^4 P'(x_1)P'(x_2)P'(x_3)P'(x_4)$ et $P'(x_i) = -\frac{x_i^4}{24}$.)*

c) On note G le groupe de Galois de P. Justifier que G s'identifie à un sous-groupe de A_4.

d) Factoriser $4!P$ sur $\mathbb{F}_5$ et sur $\mathbb{F}_{17}$ (*indication : vérifier que X^2+X-1 divise $4!P \mod 17$*).

e) En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

f) Montrer que $G = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ou A_4.

g) On pose :

$$\alpha = x_1x_2 + x_3x_4,\ \beta = x_1x_3 + x_2x_4,\ \gamma = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Montrer que $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - 12X^2 + 192$.

h) Montrer que $G = A_4$.

Exercice 3. Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{K}^2$, $\mathbb{K}$ étant un corps infini.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe deux polynômes $F, G \in \mathbb{K}[X,Y]$ tels que $A = V(\langle F, G\rangle)$.

Étant donnée une base (u,v) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$, on note $R_{(u,v)}$ le repère affine (O,u,v) où $O = (0,0) \in \mathbb{K}^2$.

a) Pour $a \in \mathbb{K}$, on note D_a la droite d'équation $x = a$ dans le repère $R_{(u,v)}$ muni des coordonnées x, y. On dit que A est en position générale dans le repère $R_{(u,v)}$ si pour tout $a \in \mathbb{K}$, $A \cap D_a$ contient au plus un élément.
Montrer qu'il existe une base (u,v) de $\mathbb{K}^2$ telle que A soit en position générale dans le repère $R_{(u,v)}$.

b) Cas particulier : on suppose ici que $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$ et que A est en position générale dans le repère (O,u,v).
Montrer qu'il existe deux polynômes $F, G \in \mathbb{K}[X,Y]$ tels que $A = V(\langle F, G\rangle)$.
Indication : pour construire F on pourra se servir d'un polynôme d'interpolation de Lagrange.

c) Conclure dans le cas général.