Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

MG1 - Algèbre commutative Durée : 3h

Contrôle terminal

Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 < 4c$. Soit $P = X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'on a un isomorphisme de corps : $\mathbb{R}[X]/\langle P \rangle \simeq \mathbb{C}$.
2. Cet isomorphisme est-il canonique ?

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et x un élément algébrique sur $\mathbb{K}$, avec x de degré impair.

1. Montrer que x^2 est algébrique sur $\mathbb{K}$.
2. Montrer que $\mathbb{K}(x^2) = \mathbb{K}(x)$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et soit $\mathbb{L}$ son corps de décomposition.

1. On suppose P irréductible. Montrer que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ divise $n!$.
   Indication : récurrence sur n.
2. Ici, P est supposé quelconque. Soient $d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{N}$ les degrés des facteurs irréductibles dans la factorisation de P dans $\mathbb{K}[X]$.
   (a) Montrer que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ divise $d_1! \cdots d_s!$.
   (b) Montrer qu'on a encore $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ qui divise $n!$.
   Indication : on pensera à $C_{d+d'}^{d}$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3(T)$: le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en une variable T. Soit α l'automorphisme de $\mathbb{K}$ défini par $\alpha(P(T)) = P(T+1)$ et soit G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ engendré par α.

1. Montrer que $G = \{\mathrm{Id},\ \alpha,\ \alpha \circ \alpha\}$.
2. Utiliser le lemme d'Artin et la caractérisation des extensions galoisiennes pour montrer que le polynôme minimal dans $\mathbb{K}^G[X]$ de $T \in \mathbb{K}$ est $P = (X - T)(X - T - 1)(X - T - 2)$ et que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{K}^G$ est de degré 3.
3. Soit $\mathbb{L} = \mathbb{F}_3(S(T))$ où $S(T) = T(T+1)(T+2)$. On veut montrer que $\mathbb{L} = \mathbb{K}^G$.
   (a) Montrer que $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$.
   (b) Considérer le polynôme $Q(X) = X(X+1)(X+2) - T(T+1)(T+2)$. Vérifier que $Q \in \mathbb{L}[X]$ et qu'il annule T.
   (c) En déduire que $[\mathbb{K}/\mathbb{L}] = 3$
   (d) Conclure que $\mathbb{L} = \mathbb{K}^G$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ et soient $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{3-\sqrt{2}}$.

1. Quelle équation est satisfaite par α et β ?
   Quel est le degré de α ?

On définit p et q par $2p = 3+\sqrt{7}$ et $2q = 3-\sqrt{7}$.

2. (a) Quels sont les conjugués de α dans $\mathbb{C}$?
   (b) Vérifier que $\alpha\beta = \sqrt{7}$.
   (c) Vérifier que $\alpha = \sqrt{p}+\sqrt{q}$ et $\beta = \sqrt{p}-\sqrt{q}$.
3. Dans cette question, on va montrer que β n'appartient pas à $\mathbb{Q}(\alpha)$.
   Par l'absurde, on suppose que $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
   (a) Montrer que $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\alpha)$; que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{7})$ puis que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
   (b) Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ tel que $\sigma(\sqrt{7}) = -\sqrt{7}$. Que vaut $\sigma(p)$?
   (c) En déduire que soit α soit β est σ-stable et donc $\mathbb{Q}(\alpha)$ ou $\mathbb{Q}(\beta)$ est de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ et que cela entraine une contradiction.
4. Conclure que la clôture normale de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est de degré 8 sur $\mathbb{Q}$.
   Expliciter son groupe de Galois.

Exercice 6. Soient I et J deux idéaux de $\mathbf{k}[x_1,\ldots,x_n]$. On suppose que I est radical.
Démontrer les deux assertions suivantes :

1. L'idéal $I : J$ est radical.
2. On a l'égalité $I : J = I : \sqrt{J}$.

Exercice 7. Soit I un idéal de $\mathbf{k}[y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n]$ qu'on abrège en écrivant $\mathbf{k}[y,x]$. On fixe $F = \{f_1(y,x),\ldots,f_s(y,x)\}$ un système de générateurs de I.
Pour tout $a = (a_1,\ldots,a_m) \in \mathbf{k}^m$, on définit

$$(I)_a = \{g(x) \in \mathbf{k}[x] \mid \exists f(y,x) \in I,\ g(x) = f(a,x)\}.$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbf{k}^m$, $(I)_a$ est un idéal de $\mathbf{k}[x]$.
2. Montrer que si $f_1(y,x),\ldots,f_s(y,x)$ est un système de générateurs de I alors pour tout $a \in \mathbf{k}^m$, $f_1(a,x),\ldots,f_s(a,x)$ est un système de générateurs de $(I)_a$.

On note $\mathbb{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{k}[y])$ et on définit J comme l'idéal de $\mathbb{K}[x]$ engendré par F.
On se donne un bon ordre monomial $\preceq$ sur les monômes $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.
Soit G une base de Gröbner de J construite à partir de F en utilisant l'algorithme de Buchberger.

3. On note $h \in \mathbf{k}[y]$ le produit des numérateurs des $\mathrm{lc}_\preceq(g) \in \mathbb{K}$ avec $g \in G$. Montrer que tous les éléments de G ont leur coefficients de la forme $\dfrac{u(y)}{(h(y))^j}$ avec $u(y) \in \mathbf{k}[y]$ et $j \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathbf{k}^m \setminus V(h)$, $G_{|y=a}$ est une base de Gröbner de $(I)_a$ pour l'ordre $\preceq$.
   Indication : on pensera au critère de Buchberger.