Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

MG1 - Algèbre commutative Durée : 3h00

Contrôle terminal

Tout résultat doit être justifié même si l'énoncé ne le précise pas explicitement.

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{C}[X,Y]$ soient $I = \langle X^2,\ Y^3\rangle$ et $J = \langle X^2 - Y^2,\ XY^3\rangle$ deux idéaux.
   (a) Montrer que $V(I) = V(J)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   (b) Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.
   (c) Déterminer $\sqrt{I}$.
2. Dans $\mathbb{R}[X,Y]$ soient $I = \langle X^2,\ Y^3\rangle$ et $K = \langle X^2 - Y^2,\ X^2Y + Y\rangle$.
   (a) Montrer que $V(I) = V(K)$ dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer $\sqrt{I}$.
   (c) Montrer que $\sqrt{I} \neq \sqrt{K}$.

Exercice 2. 1. Dans $\mathbb{K}[X,Y]$, soient P et Q deux polynômes sans facteur commun.
   (a) En utilisant Bézout dans $\mathbb{K}(X)[Y]$ montrer qu'il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ et $A, B \in \mathbb{K}[X,Y]$ tels que $S = AP + BQ$.
   (b) En déduire que $V(P) \cap V(Q)$ est fini.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X,Y]$ irréductible. On suppose que $V(P)$ est infini. Montrer que $I(V(P)) = \langle P\rangle$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $W = \{(x,y)\ ;\ y = 0\} \cup \{(x,y)\ ;\ y = x^2\}$. Trouver un exemple de $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que $V(P) = W$ et $I(V(P)) \neq \sqrt{\langle P\rangle}$.

Exercice 3. 1. Déterminer le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
2. Déterminer le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

Exercice 4. 1. Déterminer le nombre de racines réelles du polynôme $P(X) = X^5 - 6X + 3$.
2. Vérifier que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Montrer que le groupe de Galois de $P(X)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. Soit $\mathbb{L}$ le corps de décomposition de P. Trouver toutes les sous-extensions normales de $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ ainsi que leurs degrés.

Exercice 5. Le but est de montrer que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ est trivial.
1. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{R}$ préserve la positivité.
2. Conclure.

Exercice 6. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{2+\sqrt{7}})$.
1. Montrer que $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ sont des extensions normales.
2. Déterminer le polynôme minimal de $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{7}}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. En déduire que l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ n'est pas normale.