4. Groupes (II) : le groupe symétrique S_n

Exercice 4.1

1. Exprimer les produits $(23) \circ (13)(245)$ et $(13)(245) \circ (23)$ en notation cyclique.
2. Quels sont les inverses de (23) et $(13)(245)$?

Exercice 4.2 Montrer que le groupe S_5 est d'ordre 120, mais ne contient aucun élément d'ordre 15.

Exercice 4.3 Combien y a-t-il de transpositions, de cycles d'ordre 3, de cycles d'ordre m dans S_n ?

Exercice 4.4 Le support de $\sigma \in S_n$ est le sous-ensemble de $E = \{1, \ldots, n\}$ des éléments qui ne sont pas laissés fixes par σ :

$$\text{supp}(\sigma) = \{x \in E \text{ tel que } \sigma(x) \neq x\}.$$

1. Donner le support de chaque élément de S_3.
2. Soit $\gamma, \sigma \in S_n$. Montrer que
$$\text{supp}\big(\gamma\sigma\gamma^{-1}\big) = \gamma(\text{supp}(\sigma))\,.$$

Exercice 4.5 Dans le groupe symétrique S_9, on considère les cycles

$$\sigma = (1, 4, 5, 2, 3, 6) \text{ et } \tau = (7, 6, 5, 8, 9).$$

1. Quelle est la signature de $\pi = \sigma\tau$?
2. Décomposer π en produit de cycles disjoints. Quel est l'ordre de π ?
3. Expliquer pourquoi π^{2001} est produit de une ou trois transpositions disjointes. Calculer π^{2001}.

Exercice 4.6 Soit la permutation de S_{12}

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer σ^{2002}.

Exercice 4.7 On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer son nombre d'inversions et en déduire sa signature.
2. Donner sa décomposition en produit de cycles disjoints et en déduire son ordre.
3. Donner une décomposition en produit de transpositions de σ ainsi qu'une décomposition en produit de transpositions simples.

Exercice 4.8 Soit $n \geq 3$. Montrer que S_n est engendré par

1. l'ensemble de toutes les transpositions ;
2. l'ensemble des transpositions $(1,2), (1,3), \ldots, (1, n-1), (1, n)$;
3. l'ensemble des transpositions $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)$;
4. la transposition $(1,2)$ et le cycle $(2, 3, \ldots, n)$.

Exercice 4.9 Dans S_8, déterminer le nombre de permutations qui se décomposent :

1. en un produit de deux cycles disjoints de longueur 3,
2. en un produit de trois cycles disjoints dont deux de longueur 2 et un de longueur 3.
3. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 3 dans S_8 ?

Exercice 4.10

1. Soit $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in S_n$ un cycle d'ordre m, et soit $\tau \in S_n$. Montrer que :
$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \ldots, \tau(a_m)) .$$
2. Montrer que les deux permutations suivantes de S_7 sont conjuguées
$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$