5. Groupes (III) : action de groupe

Exercice 5.1 Soient A et B deux sous-ensembles d'un groupe G, on pose :

$$AB = \{ab \in G \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont des sous-groupes de G, alors AB est lui aussi un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$. Trouver un exemple où le résultat s'applique et aussi un contre-exemple.

Exercice 5.2 Soit G un groupe, et soient H et K deux sous-groupes distingués de G tels que $H \cap K = \{e\}$.

1. Montrer que $hk = kh$ pour tout $(h,k) \in H \times K$ (Indication : montrer que $hkh^{-1}k^{-1} = e$).
2. En déduire que HK est un sous-groupe de G, isomorphe à $H \times K$.
3. Application : Soient $n, m \geq 2$ deux entiers premiers entre eux, montrer que :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}.$$

   Indication : prendre $H = \langle \bar{m} \rangle$ et $K = \langle \bar{n} \rangle$.

Exercice 5.3 Soit G un groupe fini d'ordre n. On numérote $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ les éléments de G. On fait agir G sur $\{1, \dots, n\}$ de la manière suivante : à tout élément $g \in G$, on associe la fonction σ_g de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même définie, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, par

$$gg_j = g_{\sigma_g(j)}.$$

1. Montrer que c'est bien une action de groupe. En déduire que σ_g est une permutation de S_n pour tout $g \in G$.
2. Construire les permutations σ_g obtenues pour le groupe $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.
3. Montrer que l'application $g \mapsto \sigma_g$ est un morphisme de groupe injectif.
4. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Exercice 5.4 Soit G un groupe fini d'ordre n divisible par p premier. Soit E le sous-ensemble de G^p défini par :

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \dots x_p = e\}.$$

Pour tout élément $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$, on pose $\sigma(\xi) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$.

1. Vérifier que σ est une permutation de E

On définit une action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E par $\bar{k}\xi = \sigma^k(\xi)$.

2. Quel est le nombre d'éléments de E ?
3. Montrer qu'une orbite contient un seul élément ξ si et seulement si $\xi = (x, \dots, x)$ avec $x^p = e$.
4. Montrer que le nombre d'orbites réduites à un élément est non nul.

5. En déduire le théorème de Cauchy : si l'ordre de G est divisible par p, alors G contient au moins un élément d'ordre p.

Exercice 5.5 Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

1. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire
$$X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}.$$
Montrer que :
$$|X| \equiv |X^G| \pmod p.$$
Indication : Écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.

2. Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit).

Exercice 5.6 Soit p un nombre premier et G un sous-groupe du groupe symétrique S_p.
On suppose que l'action naturelle de G sur l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ est *transitive*.

1. (a) Montrer que p divise $|G|$.
   (b) En appliquant le théorème de Cauchy, montrer que G contient un p-cycle σ.
   (c) On note $H = \langle \sigma \rangle$ et N le normalisateur dans S_p du sous-groupe H.
   (d) Soit $\tau \in N$. Prouver qu'il existe un unique entier i, $1 \leq i \leq p-1$ tel que : $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^i$. On note : $\varphi(\tau) = \bar{\imath}$ la classe de i modulo p.
   (e) Montrer que l'application $\varphi : \tau \mapsto \varphi(\tau)$ est un morphisme de groupes : $N \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
   (f) Soit $\tau \in N$ tel que $\tau\sigma = \sigma\tau$. On pose i tel que $\tau(1) = \sigma^i(1)$. Montrer que $\tau = \sigma^i$. (Indication : utiliser le fait que pour tout $x \in \{1, \dots, p\}$, il existe k tel que $\sigma^k(1) = x$.)
   (g) En déduire que $\ker \varphi = H$.
   (h) Prouver que $\forall i$, $1 \leq i \leq p-1$, σ^i est un p-cycle. En déduire que φ est surjectif.
   (i) Montrer que le groupe quotient N/H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

2. On suppose que le groupe G vérifie la condition suivante : $\forall \tau \in G$, $\tau \neq e$, τ a au plus un point fixe dans $\{1, \dots, p\}$.
   (a) On note $X = \{\tau \in G : \tau \text{ n'a pas de point fixe}\}$. En appliquant la formule de Burnside, prouver que : $|X| = p - 1$. En déduire : $H = X \cup \{e\}$.
   (b) En utilisant ce qui précède, montrer que H est distingué dans G.
   (c) Montrer que le groupe quotient G/H est cyclique d'ordre m un diviseur de $p - 1$.
   (d) Soit K le stabilisateur dans G d'un point fixé $x \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que l'application naturelle $\pi \mapsto \pi \mod H$ est un isomorphisme de K à G/H.
   En déduire que K est un groupe cyclique.
   (e) Soit τ un générateur du groupe K. Montrer que τ est produit de $\frac{p-1}{m}$ cycle disjoints de longeur m. (Indication : on pourra montrer que si la décomposition de τ contient un cycle de longueur $< m$ alors G contient un élément avec plus d'un point fixe.)
   En déduire que τ est un cycle si et seulement si $G = N$.