Licence ST - Année 2008/2009 - Semestre d'automne
Contrôle continu n°1, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 1h30.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1.

1. Étant donné un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E. Donner la définition de l'ensemble E/F.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1,1,0)$ et $v_2 = (1,0,1)$.
   (a) Quelle est la dimension de E/F ?
   (b) Donner une base de E/F.

Exercice 2 (la plupart des questions sont indépendantes).
Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par :

$$b((x,y,z),(x',y')) = 3xx' - xy' + yy' - 4zx' + zy'.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
2. Donner la matrice de b relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Quel est le rang de b ?
4. Soit $u = (4,1,3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'orthogonal à u dans $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.
5. Soit $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'orthogonal à v dans $\mathbb{R}^3$: $\{v\}^\perp$.

Exercice 3 (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes).

1. Étant donné un espace vectoriel E, donner la définition de E^*.
2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par w_1, w_2, w_3 qui sont donnés par
$$w_1(x,y,z,t) = x + 2y - z + 3t, \qquad w_2(x,y,z,t) = 2x + y + z + 2t,$$
$$w_3(x,y,z,t) = 3x + 3z + t.$$
   (a) Donner une base de G.
   (b) Quelle est la dimension de $\mathrm{ann}_E(G)$, l'annulateur de G dans E ?
   (c) Donner une base de $\mathrm{ann}_E(G)$.

3. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. On définit

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E^* & \longrightarrow & F^* \\ & w & \longmapsto & w_{|F} \end{array}$$

où $w_{|F}$ désigne la restriction de w à F. On admet que ψ est linéaire.

(a) Montrer que ψ est surjective.

(b) Montrer que ψ n'est pas injective.

Indication pour la question 3 : On pourra, dans (a) et (b), utiliser un supplémentaire de F dans E.