

Licence ST - Année 2008/2009 - Semestre d'automne
Contrôle continu n°1, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 1h30.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1.

1. Étant donné un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E . Donner la définition de l'ensemble E/F .
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 1)$.
 - (a) Quelle est la dimension de E/F ?
 - (b) Donner une base de E/F .

Exercice 2 (la plupart des questions sont indépendantes).

Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par :

$$b((x, y, z), (x', y')) = 3xx' - xy' + yy' - 4zx' + zy'.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
2. Donner la matrice de b relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .
3. Quel est le rang de b ?
4. Soit $u = (4, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'orthogonal à u dans \mathbb{R}^3 est \mathbb{R}^2 .
5. Soit $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'orthogonal à v dans $\mathbb{R}^3 : \{v\}^\perp$.

Exercice 3 (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes).

1. Étant donné un espace vectoriel E , donner la définition de E^* .
2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par w_1, w_2, w_3 qui sont donnés par

$$w_1(x, y, z, t) = x + 2y - z + 3t, \quad w_2(x, y, z, t) = 2x + y + z + 2t,$$

$$w_3(x, y, z, t) = 3x + 3z + t.$$

- (a) Donner une base de G .
- (b) Quelle est la dimension de $\text{ann}_E(G)$, l'annulateur de G dans E ?
- (c) Donner une base de $\text{ann}_E(G)$.

3. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E . On définit

$$\begin{aligned}\psi : E^* &\longrightarrow F^* \\ w &\longmapsto w|_F\end{aligned}$$

où $w|_F$ désigne la restriction de w à F . On admet que ψ est linéaire.

- (a) Montrer que ψ est surjective.
- (b) Montrer que ψ n'est pas injective.

Indication pour la question 3 : On pourra, dans (a) et (b), utiliser un supplémentaire de F dans E .