Univ. Lyon 1 - Licence STS - Printemps 2009/2010
Contrôle continu n°1, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 2h00.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1.

Soit p un nombre premier et soit $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Soit $v = (1,1,1) \in \mathbf{k}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(v) \subseteq \mathbf{k}^3$.

1. Quelle est la dimension de $\mathbf{k}^3/F$?
2. Donner une base de $\mathbf{k}^3/F$.
3. Quel est le cardinal de $\mathbf{k}^3/F$?
4. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3/\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$? Quel est son cardinal ?

Exercice 2.

Dans $(\mathbb{R}^2)^*$ soient w_1 et w_2 donnés par

$$w_1(x,y) = 2x + y, \quad w_2(x,y) = 2x - y.$$

1. Justifier que w_1 et w_2 forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
2. Calculer la base antéduale de (w_1, w_2).

Exercice 3.

Soit $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par :

$$b((x,y),(x',y',z')) = (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
2. Donner la matrice de b relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Quel est le rang de b ?
4. Soit $u = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'orthogonal à u dans $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.
5. Soit $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'orthogonal à v dans $\mathbb{R}^3$: $\{v\}^\perp$.
6. b est-elle dégénérée ?
7. (Question plus difficile.) Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telles que la matrice de b dans ces bases soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Si oui, cette base est-elle unique ?

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus n.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

appartient à $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} w_i : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P(\frac{i}{n}). \end{array}$$

2. Pour chaque $i = 0, \ldots, n$, calculer $w_i\Big((X - \frac{1}{n})(X - \frac{2}{n}) \cdots (X - \frac{n}{n})\Big)$.
3. Montrer que la famille $(w_0, \ldots, w_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
4. En déduire qu'il existe un unique $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\alpha(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot P\left(\frac{i}{n}\right).$$

5. Dans le cas $n = 2$, calculer a_0, a_1 et a_2.

Exercice 5.
Soit E un espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $u : F \to (F + G)/G$ donnée par $u(x) = \overline{x}$ où $\overline{x}$ signifie la classe de x dans le quotient $(F + G)/G$.

1. Montrer que u est linéaire et surjective.
2. Déterminer le noyau de u.
3. En déduire qu'il existe un isomorphisme

$$F/(F \cap G) \simeq (F + G)/G.$$