

Univ. Lyon 1 - Licence STS - Printemps 2009/2010
Contrôle continu final, Math IV Algèbre

- Durée : 2h00.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Questions de Cours.

1. Donner la définition d'une matrice orthogonale.
2. Donner la définition d'une forme quadratique.
3. F étant un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E , donner la définition de l'ensemble E/F .
4. Donner la définition d'un espace euclidien.

Exercice 1.

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} indéfiniment dérivables. On considère l'équation différentielle

$$(\star) \quad y'' + y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons E l'espace vectoriel (réel) des solutions de (\star) . On admet que E est de dimension 2.

1. Soit \mathcal{B} la famille (\cos, \sin) de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .
2. La famille \mathcal{B} est-elle une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Notons $\mathcal{B}^* = (\cos^*, \sin^*)$ la base duale de \mathcal{B} .

Soient $w_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$, $w_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $w_3 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies ainsi :

$$w_1(f) = f(0), \quad w_2(f) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad w_3(f) = f'(0).$$

3. Montrer que w_1 et w_2 forment une base de E^* .
4. Montrer que $w_2 = w_3$.
5. Ecrire w_1, w_2 en fonction de \cos^* et \sin^* .
6. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de (\star) , et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(a) + f(0) \sin(b) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(b) - f(0) \sin(a).$$

7. Déterminer $\text{ann}_E(w_2)$.

Exercice 2.

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de M .
2. Donner la signature de q .
3. Calculer une base de \mathbb{R}^4 qui est orthogonale pour q et orthonormale pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4 .
4. Existe-t-il une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 telle que $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 2, 3, -1)$? Si oui, en donner une.
5. Existe-t-il une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 orthonormale (pour le produit scalaire canonique) telle que $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 1, -1)$? Si oui, en donner une.

Exercice 3.

Soit $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel non nul et soit $q : E \rightarrow \mathbf{k}$ une forme quadratique non nulle.

1. Montrer que pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{k}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. Montrer que q n'est pas injective.
3. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, montrer que q est surjective si et s. si q n'est ni positive ni négative.
4. Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, montrer que q est surjective.

Exercice 4.

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^2 donnée par :

$$q(x, y) = (2x + y)^2 - 4(x + y)^2.$$

1. Montrer que les formes linéaires w_1 et w_2 données par $w_1(x, y) = 2x + y$ et $w_2(x, y) = x + y$ forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
2. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ la base antéduale de (w_1, w_2) . Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer les coordonnées x', y' de v dans \mathcal{B} en fonction de x et y .
3. En déduire la matrice de q dans la base \mathcal{B} ?
4. Calculer le noyau et le cône isotrope de q .

Exercice 5.

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension 3.

Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subseteq \ker(f)$ puis que $\text{rg}(f) = 1$.
2. Soit v un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$. Montrer qu'il existe $w \in E^*$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = w(x) \cdot v$.