Licence ST - Année 2008/2009 - Semestre d'automne
Contrôle terminal, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 2h00.
- Documents écrits et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Questions de cours

1. Étant donné un espace vectoriel E sur un corps $\mathbf{k}$, rappeler la définition du dual de E.
2. Donner la définition de la transposée d'une application linéaire.
3. Donner la définition d'une matrice orthogonale.

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}^3$, soit q la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz - 14yz.$$

1. Donner la matrice de q relativement à la base canonique.
2. Utiliser l'orthogonalisation de Gauss et donner une base orthogonale pour q.
3. Donner le rang et la signature de q.
4. Trouver un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$ tel que $q(v) = 0$.
   Indication : on pourra chercher v dans $\mathrm{Vect}(w, w')$ où w, w' sont deux vecteurs de la base trouvée tels que $q(w)q(w') < 0$.

Exercice 2

Soit c un nombre réel. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base donnée de E. Soit q la forme quadratique sur E telle que sa matrice relativement à $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & 1 \\ c & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Donner $q(b_1)$, $q(b_2)$ et $q(b_3)$ et en déduire que q n'est ni définie ni positive ni négative.
2. Calculer le déterminant de M. En déduire le rang et la signature de q en fonction de c.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme linéaire suivant :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+2z, x+2y+2z, 2x+2y+5z). \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour f.
2. En calculer une.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{k}$. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset \ker(b)$.

On aimerait définir une forme bilinéaire $b_{E/F}$ comme suit :

$$b_{E/F} \;:\; \begin{array}{ccc} E/F \times E/F & \to & \mathbf{k} \\ (X,Y) & \mapsto & b(x,y) \end{array}$$

où x (resp. y) est un élément quelconque de X (resp. Y) i.e. $x \in E$ est tel que $\bar{x} = X$, $\bar{x}$ désignant la classe de x dans E/F (resp. $\bar{y} = Y$).

1. Montrer que $b_{E/F}$ est bien définie en tant qu'application (i.e. $b_{E/F}(X,Y)$ ne dépend pas du choix d'un $x \in X$ et d'un $y \in Y$).
2. Montrer que $b_{E/F}$ est une forme bilinéaire symétrique.
3. Rappelons que par hypothèse, $F \subset \ker(b)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$F = \ker(b) \iff b_{E/F} \text{ est non dégénérée.}$$