Licence ST - Année 2008/2009 - Semestre d'automne
Un Corrigé du contrôle terminal, Math IV Algèbre

Questions de cours

1. Étant donné un espace vectoriel E sur un corps $\mathbf{k}$, rappeler la définition du dual de E.

   Le dual de E est l'ensemble des formes linéaires sur E, i.e. l'ensemble des applications linéaires de E vers $\mathbf{k}$.
2. Donner la définition de la transposée d'une application linéaire.

   Étant donnée une application linéaire $u : E \to F$, sa transposée ${}^t u$ est l'application ${}^t u : F^* \to E^*$ donnée par ${}^t u(w) = w \circ u$.
3. Donner la définition d'une matrice orthogonale.

   C'est une matrice carrée A telle que ${}^t A \cdot A$ est égal à la matrice identité.

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}^3$, soit q la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz - 14yz.$$

1. Donner la matrice de q relativement à la base canonique.

   La matrice en question est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -7 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Utiliser l'orthogonalisation de Gauss et donner une base orthogonale pour q.

$$\begin{aligned}
q(x, y, z) &= 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz - 14yz \\
&= 2(x^2 + 2x(-y + 2z)) + 5y^2 + 5z^2 - 14yz \\
&= 2[(x + (-y + 2z))^2 - (-y + 2z)^2] + 5y^2 + 5z^2 - 14yz \\
&= 2[(x - y + 2z)^2 - (y^2 + 4z^2 - 4yz)] + 5y^2 + 5z^2 - 14yz \\
&= 2(x - y + 2z)^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6yz \\
&= 2(x - y + 2z)^2 + 3(y^2 - 2yz) - 3z^2 \\
&= 2(x - y + 2z)^2 + 3[(y - z)^2 - z^2] - 3z^2 \\
&= 2(x - y + 2z)^2 + 3(y - z)^2 - 6z^2.
\end{aligned}$$

   Remarque : pour des raisons pratiques, je vais écrire les vecteurs sous forme de lignes au lieu de colonnes comme habituellement.

Notons e_1, e_2, e_3 les éléments de base canonique de $\mathbb{R}^3$ et notons b_1, b_2, b_3 ceux de la base recherchée. On peut obtenir les b_i en remarquant qu'un vecteur (x, y, z) aura pour coordonnées $x - y + 2z$, $y - z$ et z dans la base formée des b_i. Cette remarque donne lieu aux relations suivantes :
$e_1 = b_1$,
$e_2 = -b_1 + b_2$,
$e_3 = 2b_1 - b_2 + b_3$.

De ceci, on déduit que
$b_1 = e_1 = (1, 0, 0)$,
$b_2 = e_2 + e_1 = (1, 1, 0)$,
$b_3 = e_3 - 2b_1 + b_2 = (-1, 1, 1)$.

3. Donner le rang et la signature de q.

   On a écrit
   $$q(x, y, z) = 2(x - y + 2z)^2 + 3(y - z)^2 - 6z^2.$$
   On en déduit que la signature de q est $(2, 1)$ et son rang est 3.

4. Trouver un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$ tel que $q(v) = 0$.
   Indication : on pourra chercher v dans $\mathrm{Vect}(w, w')$ où w, w' sont deux vecteurs de la base trouvée tels que $q(w)q(w') < 0$.

   Soient α, β deux scalaires et $v = \alpha b_1 + \beta b_3$. Ainsi v a pour coordonées $(\alpha, 0, \beta)$ dans la base des b_i. En conséquence, on a :
   $$q(v) = (\alpha, 0, \beta) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = 2\alpha^2 - 6\beta^2.$$
   Par conséquent si $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 1$, on obtient 0 ci-dessus. Ainsi le vecteur $v = \sqrt{3}b_1 + b_3 = (\sqrt{3} - 1, 1, 1)$ répond à la question.

<u>Exercice 2</u>

Soit c un nombre réel. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base donnée de E. Soit q la forme quadratique sur E telle que sa matrice relativement à $\mathcal{B}$ est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & 1 \\ c & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Donner $q(b_1)$, $q(b_2)$ et $q(b_3)$ et en déduire que q n'est ni définie ni positive ni négative.

   Notons b la forme polaire de q. La matrice M a pour coefficients les $b(b_i, b_j)$ ainsi $q(b_1) = b(b_1, b_1) = 0$. De même, $q(b_2) = -1$ et $q(b_3) = 4$.

On a $q(b_1) = 0$ et b_1 est non nul (puisque c'est un élément d'une base) donc q n'est pas définie. De plus, puisque $q(b_2) < 0$, q n'est pas positive et puisque $q(b_3) > 0$, q n'est pas négative.

2. Calculer le déterminant de M. En déduire le rang et la signature de q en fonction de c.

   On calcule le déterminant en développant par rapport à la première ligne et on obtient : $\det(M) = 1 - 4c^2 = (1 - 2c)(1 + 2c)$.
   Ainsi on a 3 cas :
   (a) Cas où $c = 1/2$ ou $c = -1/2$. Ici, $\det(M) = 0$.
   (b) Cas où $c > 1/2$ ou $c < -1/2$. Ici, $\det(M) > 0$.
   (c) Cas où $-1/2 < c < 1/2$. Ici, $\det(M) < 0$.
   Puisque q n'est ni positive, ni négative, sa signature appartient à $\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$. Un théorème du cours dit que la signature de q est donnée par le nombre de valeurs propres (strictement) positives et négatives de M. Donc il y a au moins une valeur propre positive et une négative. Enfin on sait que le déterminant est le produit des valeurs propres. On en déduit que :
   - dans le cas (a), $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$ et $\mathrm{rang}(q) = 2$,
   - dans le cas (b), $\mathrm{sign}(q) = (1,2)$ et $\mathrm{rang}(q) = 3$,
   - dans le cas (c), $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$ et $\mathrm{rang}(q) = 3$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme linéaire suivant :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+2z, x+2y+2z, 2x+2y+5z). \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour f.

   La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. De plus la matrice de f dans cette base est

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   et cette matrice est symétrique. On en déduit que f est auto-adjoint ce qui par un théorème du cours permet de dire qu'il existe une base de vecteur propres de f qui est orthonormée.

2. En calculer une.

   Notons A la matrice ci-dessus. On peut calculer le polynôme caractéristque de A mais on peut aussi remarquer que 1 est une valeur propre "évidente" de M car

   $$M - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

est de rang plus petit que 3. En fait cette matrice est de rang 1 ce qui nous montre que 1 est une valeur propre de multiplicité géométrique au moins 2. (En fait, sa multiplicité est forcément 2 puisque M est diagonalisable.) On peut obtenir l'autre valeur propre en utilisant la trace. En effet, la trace de M (qui est 9) est égal à la somme de ses valeurs propres (Math III) ce qui nous donne 7 comme autre valeur propre.
Calculons pour commencer E_7. C'est le noyau de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par le calcul on trouve naturellement le vecteur $v_7 = (1,1,2) \in E_7$. Comme E_7 est de dimension 1, $\{v_7\}$ en est une base.
Calculons E_1. C'est le noyau de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi E_1 est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x+y+2z=0$. En prenant par exemple $x=1$ et $y=1$, on obtient le vecteur $v_1 = (1,1,-1)) \in E_1$. J'aimerais maintenant un vecteur v_1' qui soit dans E_1 et orthogonal à v_1. Notons $v_1' = (x,y,z)$. On veut donc

$$x+y+2z=0 \text{ et } x+y-z=0.$$

On en tire $z=0$ et $x=-y$. On peut donc prendre $v_1' = (1,-1,0)$.
Comme bilan, v_1, v_1' et v_7 forment une base de vecteurs propres qui sont orthogonaux entre eux : en effet v_1 et v_1' le sont par construction et v_7 est orthogonal à v_1 et v_1' car on sait par le cours que les espaces propres sont orthogonaux deux à deux. Ainsi, pour conclure il suffit de normer les vecteurs obtenus. Une base voulue est donc la suivante :

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\Big\}.$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{k}$. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset \ker(b)$.

On aimerait définir une forme bilinéaire $b_{E/F}$ comme suit :

$$\begin{array}{cccc} b_{E/F} & : & E/F \times E/F & \rightarrow & \mathbf{k} \\ & & (X,Y) & \mapsto & b(x,y) \end{array}$$

où x (resp. y) est un élément quelconque de X (resp. Y) i.e. $x \in E$ est tel que $\bar{x} = X$, $\bar{x}$ désignant la classe de x dans E/F (resp. $\bar{y} = Y$).

1. Montrer que $b_{E/F}$ est bien définie en tant qu'application (i.e. $b_{E/F}(X,Y)$ ne dépend pas du choix d'un $x \in X$ et d'un $y \in Y$).

Montrons que $b_{E/F}(X,Y)$ ne dépend pas du choix d'un $x \in X$. De façon similaire, cela ne dépendra pas du choix d'un $y \in Y$.
Soient donc $X \in E/F$ et $x, x' \in E$ tels que $x, x' \in X$, i.e. $\bar{x} = \overline{x'} = X$, le but étant de montrer que pour tout $y \in E$, $b(x,y) = b(x',y)$. Autrement dit on veut $b(x-x',y) = 0$ pour tout y. Mais ceci découle du fait que $x - x' \in F \subset \ker(b)$.

2. Montrer que $b_{E/F}$ est une forme bilinéaire symétrique.

   Montrons la linéarité à gauche. Soient $X, X', Y \in E/F$ et $\lambda \in \mathbf{k}$. On s'intéresse à $b(\lambda X + X', Y)$. Soient $x \in X$, $x' \in X'$ et $y \in Y$. On a :

$$\lambda X + X' = \lambda \bar{x} + \overline{x'} = \overline{\lambda x + x'}$$

   ce qui signifie que $\lambda x + x' \in \lambda X + X'$ donc par définition de $b_{E/F}$, on a $b_{E/F}(\lambda X + X', Y) = b(\lambda x + x', y)$. Par suite, on aura :

$$\begin{aligned} b_{E/F}(\lambda X + X', Y) &= b(\lambda x + x', y) \\ &= \lambda b(x,y) + b(x',y) \\ &= \lambda b_{E/F}(X,Y) + b_{E/F}(X',Y) \end{aligned}$$

   d'où la linéarité à gauche de $b_{E/F}$.
   La symétrie est triviale (laissée en exercice) et entraine la linéarité à droite.

3. Rappelons que par hypothèse, $F \subset \ker(b)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$F = \ker(b) \iff b_{E/F} \text{ est non dégénérée.}$$

   $\Rightarrow$: On veut montrer que le noyau de $b_{E/F}$ est nul. Soit donc X dans ce noyau, le but étant de montrer que $X = 0$ (dans E/F). Par hypothèse sur X, $b_{E/F}(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in E/F$.
   Soit $x \in X$. Alors pour tout $y \in E$, $b(x,y) = b(X, \bar{y}) = 0$. Ceci implique que x est dans le noyau de b.
   Or par hypothèse, $\ker(b) = F$, donc $x \in F$ et par conséquent $X = \bar{x} = \overline{0_E} = 0_{E/F}$.

   $\Leftarrow$: Puisque F est contenu dans $\ker(b)$, il suffit de montrer l'inclusion inverse.
   Soit donc $x \in \ker(b)$. Alors pour tout $y \in E$, $b(x,y) = 0$. Ceci a pour conséquence que pour tout $Y \in E/F$, $b_{E/F}(\bar{x}, Y) = 0$ ce qui signifie que $\bar{x}$ appartient au noyau de $b_{E/F}$.
   Or par hypothèse, $b_{E/F}$ est non dégénérée, i.e. $\ker(b_{E/F}) = \{0\}$, donc $\bar{x}$ est nul. On en conclut que $x \in F$.

Quelques remarques : Dans le cours j'ai défini une forme bilinéaire comme étant non dégénérée si les applications associées δ et γ sont injectives. Lorsque la forme bilinéaire est symétrique, on a $\delta = \gamma$. Dans ce cas, la non dégénérescence revient à dire que si x est tel que $b(x,y) = 0$ pour tout y alors x est nul.