Licence ST - Année 2008/2009 - Semestre d'automne
Une correction du contrôle continu n°1, Math IV Algèbre

Exercice 1.

1. Étant donné un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E. Donner la définition de l'ensemble E/F.
   Voici par exemple une réponse attendue : E/F est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. C'est l'ensemble des $\bar{x}$ avec $x \in E$, où $\bar{x} = \{y \in E | x - y \in F\}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 1)$.
   (a) Quelle est la dimension de E/F ?
   $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$
   (b) Donner une base de E/F.
   Soit $w = (0, 1, 0)$. Montrons que v_1, v_2, w sont libres dans $\mathbb{R}^3$. Soient, pour cela, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cw = (0, 0, 0)$. Alors $(a + b, a, b + c) = (0, 0, 0)$ et on en déduit que $a = 0$ puis que $b = 0$ et $c = 0$. De ce qui précède on en déduit que $w \notin F$. Par conséquent sa classe $\bar{w}$ dans E/F n'est pas nulle. Or d'après la question 2(a), $\dim(E/F) = 1$ donc $\{\bar{w}\}$ est une base de E/F

Exercice 2 (la plupart des questions sont indépendantes).
Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par :

$$b((x, y, z), (x', y')) = 3xx' - xy' + yy' - 4zx' + zy'.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
   Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} b(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x', y')) &= b((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2), (x', y')) \\ &= 3(\lambda x_1 + x_2)x' - (\lambda x_1 + x_2)y' + (\lambda y_1 + y_2)y' \\ &\quad -4(\lambda z_1 + z_2)x' + (\lambda z_1 + z_2)y' \\ &= \lambda \cdot (3x_1x' - x_1y' + y_1y' - 4z_1x' + z_1y') + \\ &\quad 3x_2x' - x_2y' + y_2y' - 4z_2x' + z_2y' \\ &= \lambda b((x_1, y_1, z_1), (x', y')) + b((x_2, y_2, z_2), (x', y')) \end{aligned}$$

   Ainsi b est linéaire à gauche. Montrons la linéarité à droite. Soient donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} b((x, y, z), \lambda(x'_1, y'_1) + (x'_2, y'_2)) &= b((x, y, z), (\lambda x'_1 + x'_2, \lambda y'_1 + y'_2)) \\ &= 3x(\lambda x'_1 + x'_2) - x(\lambda y'_1 + y'_2) + y(\lambda y'_1 + y'_2) \\ &\quad -4z(\lambda x'_1 + x'_2) + z(\lambda y'_1 + y'_2) \\ &= \lambda \cdot (3xx'_1 - xy'_1 + yy'_1 - 4zx'_1 + zy'_1) + \\ &\quad 3xx'_2 - xy'_2 + yy'_2 - 4zx'_2 + zy'_2 \\ &= \lambda b((x, y, z), (x'_1, y'_1)) + b((x, y, z), (x'_2, y'_2)) \end{aligned}$$

2. Donner la matrice de b relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
   Notons (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Alors par défintion la matrice demandée est la matrices des $b(e_i, f_j)$. C'est donc :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Quel est le rang de b ?
   Le rang de b est égal au rang de sa matrice relativement à n'importe quel couple de bases, c'est donc 2.
4. Soit $u = (4, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'orthogonal à u dans $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.
   Pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $b(u, (x', y')) = 3(4 \cdot x') - 4 \cdot y' + 1 \cdot y' - 4(3 \cdot x') + 3 \cdot y' = 0$. Ainsi u est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}^2$, i.e. son orthogonal est $\mathbb{R}^2$ tout entier.
5. Soit $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'orthogonal à v dans $\mathbb{R}^3$: $\{v\}^\perp$.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ce dernier est orthogonal à v si et seulement si $b((x, y, z), (1, 1)) = 0$. En développant on obtient $2x + y - 3z = 0$. (Remarque : géométriquement, l'orthogonal à v est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ d'equation $2x + y - 3z = 0$).
   Si on note $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire donnée par $w(x, y, z) = 2x + y - 3z$, on a $v^\perp = \ker(w)$. Ainsi par le théorème du rang, $\dim(v^\perp) = 3 - 1 = 2$.
   Ainsi pour en déterminer une base il suffit de trouver deux éléments de $v^\perp$ qui soient non colinéaires. Les vecteurs $u_1 = (3, 0, 2)$ et $u_2 = (0, 3, 1)$ font l'affaire.

<u>Exercice 3</u> (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes).

1. Étant donné un espace vectoriel E, donner la définition de E^*.
   C'est l'ensemble des applications linéaires de E vers $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ étant le corps de base de E).
2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par w_1, w_2, w_3 qui sont donnés par

$$w_1(x, y, z, t) = x + 2y - z + 3t, \qquad w_2(x, y, z, t) = 2x + y + z + 2t,$$
$$w_3(x, y, z, t) = 3x + 3z + t.$$

   (a) Donner une base de G.
   On remarque que $w_3 = 2w_2 - w_1$. Ainsi G est engendré par w_1 et w_2. Comme ils sont clairement non colinéaires, ils en forment une base.

   (b) Quelle est la dimension de $\mathrm{ann}_E(G)$, l'annulateur de G dans E ?
   On sait que

$$\dim(E) = \dim(G) + \dim(\mathrm{ann}_E(G))$$

   d'où $\dim(\mathrm{ann}_E(G)) = 4 - 2 = 2$.

   (c) Donner une base de $\mathrm{ann}_E(G)$.
   Comme la dimension de l'espace en question est 2, il suffit pour en obtenir une base d'en donner deux vecteurs non colinéaires.

(Remarque : une façon de faire est de fixer deux coordonnées et de trouver les deux autres à partir des equations obtenues à partir de w_1 et w_2, ou mieux à partir de w_1 et w_3 car ces derniers donnent un système echelonné).

En fixant, par exemple, successivement $z = 1, t = 0$ et $z = 0, t = 3$ on obtient les deux vecteurs suivants dans $\mathrm{ann}_E(G)$: $u_1 = (-1, 1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, -4, 0, 3)$.

(Remarque : dans le deuxième cas, j'ai pris $t = 3$ au lieu de $t = 1$ simplement pour éviter des fractions.)

3. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. On définit

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E^* & \longrightarrow & F^* \\ & w & \longmapsto & w_{|F} \end{array}$$

où $w_{|F}$ désigne la restriction de w à F. On admet que ψ est linéaire.

(a) Montrer que ψ est surjective.

Soit $w' \in F^*$. On va lui construire un antécédent. Soit S un supplémentaire de F dans E. On définit $w : E \to \mathbf{k}$ de la façon suivante (on a noté $\mathbf{k}$ le corps de base de E). Pour $x \in E$, on écrit de façon unique $x = s + f$ avec $s \in S$ et $f \in F$ et on pose $w(x) = w'(f)$.

Montrons que w est bien linéaire. Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbf{k}$. Écrivons $x = s + f$ et $x' = s' + f'$ avec $s, s' \in S$ et $f, f' \in F$. Alors $\lambda x + x' = (\lambda s + s') + (\lambda f + f')$ et on a

$$w(\lambda x + x') = w'(\lambda f + f') = \lambda w'(f) + w'(f') = \lambda w(x) + w(x').$$

Ainsi w est bien un élément de E^*.

Maintenant si $f \in F$ alors $w(f) = w'(f)$ ce qui signifie que $w_{|F} = w'$, i.e. $\psi(w) = w'$.

(b) Montrer que ψ n'est pas injective.

Encore une fois, soit S un supplémentaire de F dans E. Puisque $F \neq E$, S n'est pas nul. Soit donc $w_1 \in S^*$ quelconque telle que $w_1 \neq 0$. Ainsi il existe $s_0 \in S$ tel que $w_1(s_0) \neq 0 \in \mathbf{k}$.

Soit maintenant $w : E \to \mathbf{k}$ définie ainsi : pour $x \in E$, on écrit $x = s + f$ avec $s \in S$ et $f \in F$ et on pose $w(x) = w_1(s)$.

Comme à la question précédente on montre que w est linéaire et donc que w appartient bien à E^*.

Si $x \in F$ alors $x = s + f$ avec $s = 0 \in S$ et $f = x \in F$ et on a $w(x) = w_1(0) = 0$. Ainsi $w_{|F} = 0$. Autrement dit $\psi(w) = 0$ ou encore $w \in \ker(\psi)$.

Mais w n'est pas nul car $w(s_0) = w_1(s_0) \neq 0$. Ceci nous montre que le noyau de ψ n'est pas nul et donc que ψ n'est pas injective.