

Univ. Lyon 1 - Licence STS - Printemps 2009/2010
Une correction du contrôle continu final, Math IV Algèbre

Exercice 1.

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} indéfiniment dérivables. On considère l'équation différentielle

$$(\star) \quad y'' + y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons E l'espace vectoriel (réel) des solutions de (\star) . On admet que E est de dimension 2.

1. Soit \mathcal{B} la famille (\cos, \sin) de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

Ici l'énoncé nous dit que E est de dimension 2. Ainsi pour montrer que la famille \mathcal{B} est une base il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\mu \cos + \nu \sin = 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu \cos(x) + \nu \sin(x) = 0$. En prenant $x = 0$ on obtient $\mu = 0$ et en prenant $x = \pi/2$ on obtient $\nu = 0$.

2. La famille \mathcal{B} est-elle une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Si cette famille était une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors toute fonction \mathcal{C}^∞ serait solution de l'équation (\star) . Or, par exemple la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $P(x) = x$ ne satisfait pas l'équation (\star) . La réponse est donc négative.

Notons $\mathcal{B}^* = (\cos^*, \sin^*)$ la base duale de \mathcal{B} .

Soient $w_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$, $w_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $w_3 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies ainsi :

$$w_1(f) = f(0), \quad w_2(f) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad w_3(f) = f'(0).$$

3. Montrer que w_1 et w_2 forment une base de E^* .

Tout d'abord on voit facilement que chaque w_i est linéaire et donc appartient à $(\mathbb{R}^2)^*$. D'autre part \mathbb{R}^2 est de dimension 2, il en est donc de même de $(\mathbb{R}^2)^*$. Donc pour répondre à la question il suffit de montrer que w_1 et w_2 sont linéairement indépendants. Soient pour cela $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = 0$. Ainsi pour tout $f \in E$, $\mu_1 w_1(f) + \mu_2 w_2(f) = 0$. Si on prend $f = \cos$ on obtient $\mu_1 = 0$ et en prenant $f = \sin$ on obtient $\mu_2 = 0$ d'où le résultat voulu.

4. Montrer que $w_2 = w_3$.

Ici ce sont deux applications linéaires. Pour montrer qu'elles sont égales il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les éléments d'une base de E , par exemple \cos et \sin . On a $w_2(\cos) = \cos(\pi/2) = 0 = -\sin(0) = \cos'(0) = w_3(\cos)$ et $w_2(\sin) = \sin(\pi/2) = 1 = \cos(0) = \sin'(0) = w_3(\sin)$ ce qui permet de conclure.

5. Ecrire w_1, w_2 en fonction de \cos^* et \sin^* .

Ecrivons $w_1 = \nu_1 \cos^* + \nu_2 \sin^*$ avec $\nu_i \in \mathbb{R}$ (c'est possible puisque \mathcal{B}^* est une base de E^*). On a alors d'une part $w_1(\cos) = \nu_1 \cos^*(\cos) + \nu_2 \sin^*(\cos) = \nu_1 \times 1 + \nu_2 \times 0 = \nu_1$ et

d'autre part $w_1(\cos) = \cos(0) = 1$ donc $\nu_1 = 1$. De façon similaire, $0 = w_1(\sin) = \nu_2$. Ainsi on obtient que $w_1 = \cos^*$.

On fait de même (je vous le laisse en exercice) avec w_2 et on obtient que $w_2 = \sin^*$.

6. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de (\star) , et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(a) + f(0)\sin(b) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(b) - f(0)\sin(a).$$

Ici il y a (au moins) deux façons de faire.

Variante 1.

Soit $f \in E$ fixée. Ecrivons $f = \mu \cos + \nu \sin$ avec $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^b \mu \cos(t) + \nu \sin(t)dt \\ &= [\mu \sin(t) - \nu \cos(t)]_a^b \text{ via une primitive} \\ &= \mu(\sin(b) - \sin(a)) + \nu(\cos(a) - \cos(b)). \end{aligned}$$

D'autre part $f(0) = \mu \cos(0) + \nu \sin(0) = \mu$ et $f(\pi/2) = \mu \cos(\pi/2) + \nu \sin(\pi/2) = \nu$. En reportant dans l'égalité ci-dessus on obtient le résultat voulu.

Variante 2.

Considérons l'application $w : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(t)dt$. C'est clairement une forme linéaire. Ainsi on peut écrire $w = \mu \cos^* + \nu \sin^*$. On calcule $\mu = w(\cos) = \sin(b) - \sin(a)$ et $\nu = w(\sin) = \cos(a) - \cos(b)$. Or par ce qui précède, on a : $\cos^* = w_1$ et $\sin^* = w_2 = w_3$. Ainsi

$$w = (\sin(b) - \sin(a))w_1 + (\cos(a) - \cos(b))w_2.$$

En appliquant w à $f \in E$ quelconque on obtient le résultat voulu.

7. Déterminer $\text{ann}_E(w_2)$.

On sait que $\dim(\text{ann}_E(w_2)) = \dim(\text{ann}_E(\text{Vect}(w_2))) = \dim(E) - \dim(\text{Vect}(w_2)) = 2 - 1 = 1$. Ainsi il suffit de trouver un élément non nul de $\text{ann}_E(w_2)$ pour en obtenir une base. Vu que $w_2 = \sin^*$ et que $\sin^*(\cos) = 0$ on obtient $\text{ann}_E(w_2) = \text{Vect}(\cos)$.

Exercice 2.

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de M .

Ici on pouvait calculer le polynôme caractéristique. Je propose une variante. On voit facilement que 1 est valeur propre. Le rang de

$$M - 1 \cdot \text{Id} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est 1 donc la valeur propre 1 est de multiplicité géométrique 3 (par le théorème du rang). De plus la trace de M est -2 et vaut la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicités (algébriques). On en déduit que -5 est l'autre valeur propre car $-5 + 1 + 1 + 1 = \text{Trace}(M) = -2$. Ainsi les valeurs propres de M sont 1 et -5 avec 1 de multiplicité 3.

2. Donner la signature de q .

Le signe des valeurs propres nous permet de dire que la signature est $(3, 1)$.

3. Calculer une base de \mathbb{R}^4 qui est orthogonale pour q et orthonormale pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4 .

On cherche une base notée par exemple \mathcal{B} qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4 et telle que $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$.

Pour comprendre ce que l'on veut, faisons quelques rappels de cours. Notons \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^4 . Notons P la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} . Cette matrice est donc une matrice de passage entre deux bases orthonormales de \mathbb{R}^4 . Ainsi P est une matrice orthogonale, i.e. telle que $P^{-1} = {}^tP$. Les matrices $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $\text{Mat}(q, \mathcal{C})$ sont liées par la relation

$${}^tP \cdot \text{Mat}(q, \mathcal{C}) \cdot P = \text{Mat}(q, \mathcal{B}).$$

Or $M = \text{Mat}(q, \mathcal{C})$ et $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ doit être diagonale. Ainsi le problème revient à diagonaliser M via une base orthonormale, i.e. trouver une base de vecteurs propres de M qui est orthonormale.

L'espace propre associé à 1 est le noyau de

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base naturel est constitué des vecteurs $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$. Ces trois vecteurs sont clairement orthogonaux deux à deux. Les deux derniers sont de norme 1 et le premier de norme $\sqrt{2}$.

L'espace propre associé à -5 est égal au noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement que $(1, 0, 1, 0)$ en fait partie. Comme -5 est de multiplicité 1, ce vecteur forme une base de l'espace propre E_{-5} .

On a ainsi une base de vecteurs propres de M constituée de vecteurs orthogonaux entre eux deux à deux. Il suffit de normer ceux qui ne sont pas de norme 1.

Finalement une base répondant à la question est la suivante :

$$((\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0)).$$

La matrice $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ est donc égale à la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 1, -5)$.

4. Existe-t-il une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 telle que $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 2, 3, -1)$? Si oui, en donner une.

Oui. Notons $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ la base de la question 3. La base $(b_1, \sqrt{2}b_2, \sqrt{3}b_3, \frac{1}{\sqrt{5}}b_4)$ répond à la question (je laisse les vérifications en exercice).

5. Existe-t-il une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 orthonormale (pour le produit scalaire canonique) telle que $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 1, -1)$? Si oui, en donner une.

Ici c'est non. En effet par l'absurde supposons qu'une telle base \mathcal{B}' existe. Soit Q la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à cette base \mathcal{B}' . Alors ${}^tQM = \text{Mat}(q, \mathcal{B}')$. D'autre part Q est orthogonale (car matrice de passage entre deux bases orthonormales) i.e. $Q^{-1} = {}^tQ$. Ainsi

$$Q^{-1}MQ = \text{Mat}(q, \mathcal{B}') = \text{Diag}(1, 1, 1, -1).$$

Mais ceci est absurde car on a diagonalisé la matrice M et sur la diagonale, les valeurs 1 et -1 devraient être les valeurs propres de M (qui sont 1 et -5).

Remarquez que la réponse aurait été oui si on n'avait pas imposé que la base soit orthonormale.

Exercice 3.

Soit $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel non nul et soit $q : E \rightarrow \mathbf{k}$ une forme quadratique non nulle.

1. Montrer que pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{k}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.

Soit $b : E \times E \rightarrow \mathbf{k}$ la forme polaire de q . Alors $q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x, x) = \lambda^2 q(x)$.

2. Montrer que q n'est pas injective.

La forme q n'est pas nulle donc il existe un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Ce vecteur est non nul (car $q(0) = 0$). Par la question précédente $q(-x) = (-1)^2 q(x) = q(x)$. Ainsi x et $-x$ sont distincts mais ont la même image par q . Celle-ci est donc non injective.

Remarque. Le noyau de q n'avait rien à voir ici.

3. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, montrer que q est surjective si et s. si q n'est ni positive ni négative.

Procédons par double implication. Supposons q surjective. Alors il existe x tel que $q(x) = 1$ donc q n'est pas négative. De même il existe x' tel que $q(x') = -1$ donc q n'est pas positive.

Réciproquement, supposons que q n'est pas positive ni négative. N'étant pas négative, il existe x tel que $q(x) > 0$. De même, q n'est pas positive donc il existe x' tel que $q(x') < 0$. Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer que a admet un antécédent par q (définition de la surjectivité). Si $a = 0$ alors $q(0) = 0 = a$. Si $a > 0$ alors (par la question 1) on a

$$q\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{q(x)}} \cdot x\right) = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{q(x)}}\right)^2 q(x) = \frac{a}{q(x)} q(x) = a.$$

Si $a < 0$ alors

$$q\left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-q(x')}} \cdot x'\right) = \left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-q(x')}}\right)^2 q(x') = \frac{-a}{-q(x')} q(x') = a.$$

4. Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, montrer que q est surjective.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme q est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Ce x est non nul. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = \frac{z}{q(x)}$ (dans \mathbb{C} , le polynôme $X^2 - \frac{z}{q(x)}$ a au moins une racine). Par la question 1,

$$q(\alpha \cdot x) = \alpha^2 q(x) = \frac{z}{q(x)} q(x) = z.$$

Exercice 4.

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^2 donnée par :

$$q(x, y) = (2x + y)^2 - 4(x + y)^2.$$

1. Montrer que les formes linéaires w_1 et w_2 données par $w_1(x, y) = 2x + y$ et $w_2(x, y) = x + y$ forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
2. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ la base antéduale de (w_1, w_2) . Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer les coordonnées x', y' de v dans \mathcal{B} en fonction de x et y .
3. En déduire la matrice de q dans la base \mathcal{B} ?
4. Calculer le noyau et le cône isotrope de q .

Exercice 5.

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension 3.

Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subseteq \ker(f)$ puis que $\text{rg}(f) = 1$.
2. Soit v un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$. Montrer qu'il existe $w \in E^*$ tel que pour tout $x \in E$,
 $f(x) = w(x) \cdot v$.