Univ. Lyon 1 - Licence STS - Printemps 2009/2010
Une Correction du contrôle continu n°1, Math IV Algèbre

Exercice 1.
Soit p un nombre premier et soit $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Soit $v = (1, 1, 1) \in \mathbf{k}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(v) \subseteq \mathbf{k}^3$.

1. Quelle est la dimension de $\mathbf{k}^3/F$?
   La dimension de $\mathbf{k}^3/F$ est $\dim(\mathbf{k}^3) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$.
2. Donner une base de $\mathbf{k}^3/F$.
   Soient $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$. Montrons que la famille $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ est libre dans $\mathbf{k}^3/F$ ce qui montrera qu'elle en est une base puisque la dimension de cet espace est deux.
   Soient $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{k}$ tels que $\nu_1\overline{e_1} + \nu_2\overline{e_2} = 0$. Cela implique que $\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 \in F$, i.e. il existe $\nu \in \mathbf{k}$ tel que $\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 = \nu v$. Ainsi $(\nu_1, \nu_2, 0) = (\nu, \nu, \nu)$. On en déduit immédiatement que $\nu = 0$ puis $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Ainsi la famille considérée est une base de $\mathbf{k}^3/F$.

   Variante. Dans le cours on a vu que si S est un supplémentaire de F dans $E = \mathbf{k}^3$ alors l'application, $(S \to E/F, s \mapsto \bar{s})$ est un isomorphisme. En utilisant (et rappelant ce resultat) il suffit de trouver un supplémentaire et plus prćisemment une base d'un supplémentaire. Par exemple $S = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$ en est un (il suffit de montrer que e_1, e_2 et v forment une base de $\mathbf{k}^3$).
3. Quel est le cardinal de $\mathbf{k}^3/F$?
   Rappelons que le cardinal d'un ensemble est le nombre de ses éléments. Ici $\mathbf{k}^3/F$ est de dimension 2 donc isomorphe à $\mathbf{k}^2$. Or $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de cardinal p donc $\mathbf{k}^2$ est de cardinal p^2.
4. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3/\mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$? Quel est son cardinal ?
   La dimension est encore 2 et le cardinal est infini.

Exercice 2.
Dans $(\mathbb{R}^2)^*$ soient w_1 et w_2 donnés par

$$w_1(x, y) = 2x + y, \quad w_2(x, y) = 2x - y.$$

1. Justifier que w_1 et w_2 forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
   Tout d'abord on remarque que ce sont bien des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ donc des formes linéaires.
   D'autre part on sait que $\dim((R^2)^*) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc pour montrer que w_1, w_2 forment une base de$(\mathbb{R}^2)^*$ il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Soient, pour cela, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\nu_1 w_1 + \nu_2 w_2 = 0$ (ici 0 signifie l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$). Soit $v = (1,0)$ alors $0 = (\nu_1 w_1 + \nu_2 w_2)(v) = 2\nu_1 + 2\nu_2$. Soit $v' = (0,1)$ alors $0 = (\nu_1 w_1 + \nu_2 w_2)(v') = \nu_1 - \nu_2$. En combinant ces égalités on montre trivialement que $\nu_1 = \nu_2 = 0$ d'où la conclusion.

<u>Variante.</u> On pouvait aussi considérer la base canonique e_1, e_2 et sa base duale e_1^*, e_2^* puis montrer que $w_1 = 2e_1^* + e_2^*$ et $w_2 = 2e_1^* - e_2^*$. Ensuite on pouvait au choix utiliser cela pour montrer que la famille $\{w_1, w_2\}$ est libre ou bien génératrice.

2. Calculer la base antéduale de (w_1, w_2).
   Ici on pouvait appliquer les méthodes vues en TD. Néanmoins, beaucoup s'en souviennent mal et se trompent (par exemple oublient de transposer...). Je pense que le plus simple est de revenir aux définitions.
   On cherche $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $w_i(v_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j \in \{1,2\}$. Soit v un vecteur quelconque. Notons $v = (x,y)$. Alors $w_1(v) = 2x + y$ et $w_2(v) = 2x - y$. En ajoutant ces égalités et en divisant par 4 on obtient
$$x = \frac{1}{4}(w_1(v) + w_2(v))$$
   et en les retranchant et en divisant par 2 on a
$$y = \frac{1}{2}(w_1(v) - w_2(v)).$$
   Notons $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$. Alors les deux égalités précédentes appliquées à v_1 donnent $x_1 = \frac{1}{4}(1+0)$ et $y_1 = \frac{1}{2}(1-0)$, d'où $v_1 = (1/4, 1/2)$. De même avec v_2, on obtient $x_2 = \frac{1}{4}(0+1)$ et $y_2 \frac{1}{2}(0-1)$ d'où $v_2 = (1/4, -1/2)$.

<u>Exercice 3.</u>
Soit $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par :
$$b((x,y),(x',y',z')) = (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
   Il suffit d'appliquer la définition...
2. Donner la matrice de b relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   Notons (e_1, e_2) et (e_1', e_2', e_3') les bases en question.

Ici on pouvait calculer les différents $b(e_i, e'_j)$. Une autre manière est de faire apparaître la matrice en cherchant à écrire le vecteur colonne $\begin{pmatrix} y' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$ sous la forme $M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec M une matrice 3×3 à determiner. Voici les détails :

$$\begin{aligned}
(x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} &= (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
&= (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice voulue est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Quel est le rang de b ?
   La matrice obtenue est de rang 2 (2 lignes non colinéaires) donc le rang de b est 2.
4. Soit $u = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'orthogonal à u dans $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.
   Ici il suffit de calculer $b((x, y), (1, 0, 0))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On trouve 0 ce qui montre que u est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, autrement dit l'orthogonal à u est $\mathbb{R}^2$.
5. Soit $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'orthogonal à v dans $\mathbb{R}^3$: $\{v\}^\perp$.
   On cherche l'ensemble des $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que $b((1, 1), (x', y', z')) = 0$. Après calcul on trouve $b((1, 1), (x', y', z')) = 2y' + 2z'$. Ainsi on cherche l'ensemble

   $$H = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 | y' + z' = 0\}.$$

   Remarquons que c'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$, H est donc un espace de dimension 2 (ceux qui ont trouver une base ne contenant qu'un élément ont naturellement faux).

   Ici le plus simple est de trouver deux vecteurs en utilisant l'équation puis de justifier que c'est bien une base de H.

   Soient $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$. On voit clairement que ces deux vecteurs sont dans H. On voit qu'ils ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. Pour finir, il reste à justifier qu'ils sont générateurs de H. Soit, pour cela un vecteur $u = (x', y', z')$ quelconque de H. Par hypothèse $y' = -z'$ donc $u = (x', y', -y')$. On peut donc écrire $u = x'(1, 0, 0) + y'(0, 1, -1) = x'u_1 + y'u_2$. Ainsi u_1 et u_2 engendrent H.

   <u>Variante</u> (pour justifier que la famille est bien une base). Un fois qu'on a remarqué que la famille (u_1, u_2) est libre, il suffit de dire que $H \neq \mathbb{R}^3$ (en effet, par exemple le vecteur $(0, 1, 0)$ n'est pas dans H). Or H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sa dimension est donc inférieur ou égale à 2. Les deux vecteurs libres u_1 et u_2 en sont donc une base.

6. b est-elle dégénérée ?

   Oui car le vecteur u de la question 4 est dans le noyau de b.

   Voici un autre argument plus général : en dimension finie si une forme bilinéaire $b : E \times F \to \mathbf{k}$ est non dégénérée alors on a forcément $\dim(E) = \dim(F)$. Ici ce n'est pas le cas donc elle est dégénérée.

7. (Question plus difficile.) Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telles que la matrice de b dans ces bases soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Si oui, cette base est-elle unique ?

   Tout d'abord la 2eme question était erronée, il fallait comprendre "Si oui, ce couple de bases est-il unique ?".

   Cette question n'a été touchée que par quelques personnes et aucune n'a donné de réponse satisfaisante.

   Notons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Ici le fait remarquable est que le rang de M est égal au rang de b. L'idée est alors de montrer que via un changement de bases dans $\mathbb{R}^2$ et un changement de bases dans $\mathbb{R}^3$ on peut obtenir la matrice M.

   Je donnerai les détails à ceux que cela intéresse.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus n.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

   appartient à $\mathbb{R}_n[X]^*$.

   Ici il n'y avait pas grand chose à dire. Il fallait dire que α est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers le corps $\mathbb{R}$ et montrer (ou justifier) qu'elle est linéaire.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} w_i : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P(\frac{i}{n}). \end{array}$$

2. Pour chaque $i = 0, \ldots, n$, calculer $w_i\Big((X - \dfrac{1}{n})(X - \dfrac{2}{n}) \cdots (X - \dfrac{n}{n})\Big)$.

   Pour $i = 1, \ldots, n$, $w_i\Big((X - \dfrac{1}{n})(X - \dfrac{2}{n}) \cdots (X - \dfrac{n}{n})\Big) = (\dfrac{i}{n} - \dfrac{1}{n})(\dfrac{i}{n} - \dfrac{2}{n}) \cdots (\dfrac{i}{n} - \dfrac{n}{n})\Big)$. Or dans ce produit, le ième terme est $\frac{i}{n} - \frac{i}{n}$. On trouve donc 0.

Il reste la cas de $i = 0$ et on obtient : $w_0\Big((X - \dfrac{1}{n})(X - \dfrac{2}{n}) \cdots (X - \dfrac{n}{n})\Big) = (-1)^n \dfrac{n!}{n^n}$.
Remarque. La question 2 servait à vous donner une idée pour la question 3. En effet dans la question 2 on a un polynôme (de degré n) qui est annulé par tous les w_i sauf w_0.

3. Montrer que la famille $(w_0, \ldots, w_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
D'après le cours $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}_n[X]^*)$ donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]^*) = n+1$. Or les w_i sont au nombre de $n+1$. Donc pour montrer qu'ils forment une base, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre ou bien génératrice. Montrons qu'ils forment une famille libre (c'est souvent le plus simple).
Soient $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^n \nu_i w_i = 0$.
Fixons $j \in \{0, \ldots, n\}$. Soit Q_j le polynôme suivant
$$Q_j = \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq j} (X - \frac{i}{n}).$$
Ainsi Q_0 est le polynôme considéré dans la question 2.
Alors $\sum_{i=0}^n \nu_i w_i$ appliqué à Q_j va donner $0 = \sum_{i=0}^n \nu_i w_i(Q_j)$. On remarque alors que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, l'une des racines de Q_j est $\frac{i}{n}$ et donc $w_i(Q_j) = 0$. Par contre $w_j(Q_j)$ est un produit de nombres non nuls. On obtient finalement $0 = \nu_j w_j(Q_j)$ avec $w_j(Q_j) \neq 0$ d'où $\nu_j = 0$. On a pris j quelconque. On en conclut donc que tous les ν_j sont nuls et la famille des w_i est libre.

4. En déduire qu'il existe un unique $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\alpha(P) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot P\left(\frac{i}{n}\right).$$
Les w_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_n[X]^*$ donc il existe un unique $(n+1)$-uplet de scalaires $(a_0, \ldots, a_n)$ tel que $\alpha = \sum_{i=0}^n a_i \cdot w_i$.
En conséquence pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = (\sum_{i=0}^n a_i \cdot w_i)(P) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot w_i(P) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot P\left(\frac{i}{n}\right)$.

5. Dans le cas $n = 2$, calculer a_0, a_1 et a_2.
On a pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$$\int_0^1 P(t)dt = a_0 \cdot P(0) + a_1 \cdot P(\frac{1}{2}) + a_2 \cdot P(1).$$
Il suffit alors de choisir trois polynômes P, de calculer les deux membres pour obtenir trois équations d'inconnues a_0, a_1, a_2, le tout étant de choisir les polynômes pour que les calculs soient assez simples.

Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X$, $P_3 = X^2$. Avec ces polynômes on obtient les trois équations suivantes : $1 = a_0 + a_1 + a_2$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_1 + a_2$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}a_1 + a_2$.
Des deux dernières équations on obtient $a_1 = 2/3$ et $a_2 = 1/6$. Par la première, on a $a_0 = 1/6$.

Exercice 5.
Soit E un espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $u : F \to (F+G)/G$ donnée par $u(x) = \overline{x}$ où $\overline{x}$ signifie la classe de x dans le quotient $(F+G)/G$.

1. Montrer que u est linéaire et surjective.
   Pour la linéarité, soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{k}$ (où on note $\mathbf{k}$ le corps de base). On a alors $u(\lambda x + y) = \overline{\lambda x + y} = \lambda \overline{x} + \overline{y} = \lambda u(x) + u(y)$.
   Pour la surjectivité, soit $X \in (F+G)/G$. Par définition il existe $x \in F+G$ tel que $X = \overline{x}$. Il existe donc $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. On obtient alors $X = \overline{x} = \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g} = \overline{f} = u(f)$. Ainsi $f \in F$ est un antécédent de X.
2. Déterminer le noyau de u.
   $\ker(u) = \{x \in F | \overline{x} = \overline{0}\} = \{x \in F | x \in G\} = F \cap G$.
3. En déduire qu'il existe un isomorphisme

$$F/(F \cap G) \simeq (F+G)/G.$$

   Par passage au quotient (voir cours), on a un isomorphisme entre $F/\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Or $\mathrm{Im}(u) = (F+G)/F$ (par surjectivité de u) et $\ker(u) = F \cap G$ d'où le résultat.