

Licence ST - Année 2006/2007 - Semestre 2
Examen session 1, Math IV Algèbre

Questions de Cours

1. Par définition, $E^* = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(E, \mathbf{k})$ et puisque les espaces vectoriels E et \mathbf{k} sont de dimension finie, on a $\dim_{\mathbf{k}}(E^*) = \dim_{\mathbf{k}}(E) \times \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \dim_{\mathbf{k}}(E) \times 1 = \dim_{\mathbf{k}}(E)$.
2. (a) Un endomorphisme orthogonal de E est un endomorphisme linéaire de E qui satisfait la propriété suivante : $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (b) *Ici le point clé était de montrer que la famille est une base. Elle est orthonormée par définition.*

Notons \mathcal{B} la famille en question. Montrons que \mathcal{B} est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0.$$

Alors pour tout entier i entre 1 et n on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, e_i \rangle \\ &= \langle \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} \\ &= \lambda_i. \end{aligned}$$

Ainsi la famille \mathcal{B} est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de E , c'est une base. L'hypothèse nous permet alors de dire qu'elle est orthonormée.

- (c) *L'énoncé disait "en déduire".*

Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1, \dots, n}$ la famille en question. Puisque f est orthogonal, on a pour tout couple d'entiers (i, j) entre 1 et n : $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. La famille $f(\mathcal{B})$ satisfait les hypothèses de la question (b). C'est donc une base orthonormée.

- (d) Par hypothèse il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dont l'image $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée, f étant un endomorphisme de E . Montrons que f est orthogonal.

Soient $x, y \in E$ de coordonnées x_i (resp. y_i) dans la base \mathcal{B} . On a d'une part :

$$\begin{aligned}
 \langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right), f\left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n y_j \cdot f(e_j) \right\rangle \text{ par linéarité de } f \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \text{ par bilinéarité de } \langle, \rangle \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{ij} \text{ car } f(\mathcal{B}) \text{ est orthonormée.}
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \text{ par bilinéarité de } \langle, \rangle \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{ij} \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée.}
 \end{aligned}$$

On constate que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Ainsi f est orthogonal.

3. Une matrice orthogonal est une matrice réelle A qui satisfait ${}^t A \cdot A = \text{Id}$.
 Une matrice unitaire est une matrice complexe A qui satisfait ${}^t \bar{A} \cdot A = \text{Id}$.
 On a : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = U_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. E étant un espace vectoriel complexe, une forme sesquilinéaire hermitienne sur E est une application h de $E \times E$ vers \mathbb{C} qui, pour $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfait :
 - $h(x + \lambda x', y) = h(x, y) + \lambda h(x', y)$,
 - $h(x, y + \lambda y') = h(x, y) + \lambda h(x, y')$,
 - $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$.
5. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et s_{ij} les coefficients de la matrice S .
 Supposons que s est hermitienne. Alors pour tous i, j entre 1 et n , $s_{ij} = s(e_i, e_j) = \overline{s(e_j, e_i)} = \overline{s_{ji}}$. Ainsi la matrice S satisfait ${}^t S = \bar{S}$.
 Supposons maintenant que S satisfait ${}^t S = \bar{S}$, i.e. on a $s(e_i, e_j) = \overline{s(e_j, e_i)}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Soient x et y dans E de coordonnées respectives x_i et y_i relativement à la

base \mathcal{B} . On a :

$$\begin{aligned}
 s(y, x) &= s\left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j, \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{y}_j x_i s(e_j, e_i) \\
 &\quad \text{par antilinéarité à gauche et linéarité à droite} \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{y}_j x_i \overline{s(e_i, e_j)} \text{ car } s \text{ est hermitienne} \\
 &= \overline{\sum_{1 \leq i, j \leq n} y_j \bar{x}_i s(e_i, e_j)} \\
 &= \overline{s\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j\right)} \\
 &= \overline{s(x, y)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi s est hermitienne.

Exercice 1

1. Le rang de b est égal à celui de A . La matrice étant symétrique, elle est de rang pair. Son rang est donc 0 ou 2. Si elle était de rang 0 elle serait nulle. Elle est donc de rang 2.
2. Ici puisqu'on travaille avec la base canonique de \mathbb{R}^3 on peut identifier un vecteur avec son vecteur coordonnée dans la base canonique. Cherchons pour commencer un vecteur v_3 du noyau de b . Il satisfait $A \cdot v_3 = 0$. Notons x, y, z ses coordonnées. Alors l'égalité $Av_3 = 0$ implique (c'est même équivalent à)

$$y - 3z = 0$$

$$3x - 2y = 0.$$

Prenons $z = 1$, on obtient $y = 3$ et $x = 2$. Ainsi le vecteur $v_3 = (2, 3, 1)$ appartient au noyau de b .

Notons alors \mathcal{B}' la famille constituée de e_1, e_2 et v_3 où e_1 et e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique. La famille \mathcal{B}' est libre car le déterminant de la matrice dont les colonnes sont e_1, e_2 et v_3 est égal à 1. Étant dans un espace de dimension 3, \mathcal{B}' est donc une base.

Notons $A' = \text{mat}(b, \mathcal{B}')$ et vérifions que A' est la matrice attendue. On a $s(e_1, v_3) = s(e_2, v_3) = s(v_3, v_3) = 0$ car v_3 est dans le noyau. Ainsi la troisième colonne de A' est nulle. Comme A' est antisymétrique, sa troisième ligne est également nulle.

D'autre part le mineur 2×2 en haut et à gauche de A' est égal à celui de A puisque faisant intervenir les mêmes vecteurs E_1, e_2 .

Ainsi A' est de la forme recherchée.

Exercice 2

0. Soit $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ et montrons que q est une forme quadratique. Soit q' la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est

$$\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}$$

Alors $q'(x, y) = ax^2 + 2 \cdot \frac{c}{2}xy + by^2 = q(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $q = q'$ et q est une forme quadratique.

Réciproquement soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^2 et montrons qu'elle est de la forme attendue. Soit

$$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$$

sa matrice dans la base canonique. Alors en posant $c = 2d$, on obtient que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = ax^2 + cxy + by^2$, d'où la conclusion.

- (a) Le calcul direct des dérivées partielles nous donne

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (b) On a $q(x, y) = 4xy - y^2$ d'où

$$\text{mat}(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

et on a $\text{Hess}(f) = 2\text{mat}(q, \mathcal{B})$.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} q(x, y) &= -(y^2 - 4xy) \\ &= -(y - 2x)^2 + 4x^2 \\ &= 4x^2 - (y - 2x)^2. \end{aligned}$$

On cherche une base \mathcal{B}' pour laquelle la matrice de q est la matrice diagonale $\text{diag}(4, -1)$. La base \mathcal{B}' est telle que (x, y) a pour coordonnées $(x, y - 2x)$ dans \mathcal{B}' . Ainsi, en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, on obtient

$$e_1 = e'_1 - 2e'_2$$

$$e_2 = e'_2.$$

d'où l'on tire

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 = (1, 2)$$

$$e'_2 = e_2 = (0, 1)$$

2. Soit $\mathcal{B}'' = (e'_1/2, e'_2)$. Alors \mathcal{B}'' est une base orthogonale pour q et $q(e'_1/2) = \frac{1}{4}q(e'_1) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ et $q(e'_2) = -1$. Ainsi pour tout v de coordonnées X, Y dans \mathcal{B}' , on a $q(v) = X^2 - Y^2$, d'où la conclusion sur f .
3. Quelques explications (à défaut de dessin) :
Il s'agit d'un point selle (car faisant penser à une selle de cheval). On note e_3 le vecteur $(0, 0, 1)$. On travaille avec la base e''_1, e''_2, e_3 où les e''_i sont les éléments de la base \mathcal{B}'' . Pour $V \in \mathbb{R}^3$ on note X, Y, Z les coordonnées dans cette base. Le graphe de f est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . Sa restriction au plan $Y = 0$ est la parabole d'équation $Z = 2 + x^2$ et sa restriction au plan $X = 0$ est la parabole $Z = 2 - Y^2$.
Ainsi on voit que dans le premier plan on a un minimum local et dans le second plan on a un maximum local, c'est ce qui justifie l'appellation de point selle.

Exercice 3

On fixe un entier $n \geq 1$. On va travailler avec le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ réelles. Dans cet espace vectoriel, pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice ayant tous ses coefficients nuls sauf un 1 en position (i, j) .

1. Soient $M, N \in MnR$ dont on note m_{ij} et n_{ij} les coefficients respectifs. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda M + N) &= \sum_{i=1}^n m_{ii} + \lambda \cdot n_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^n n_{ii} \\ &= \text{tr}(M) + \lambda \cdot \text{tr}(N). \end{aligned}$$

Ainsi tr est linéaire et appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

Notons $C = (c_{ij}) = MN$ et $D = (d_{ij}) = NM$. Pour la trace, seuls les coefficients diagonaux de C nous intéressent. On a : $c_{ii} = \sum_{j=1}^n m_{ij}n_{ji}$ et $d_{ii} = \sum_{j=1}^n m_{ji}n_{ij}$.

Si on somme les c_{ii} d'une part et les d_{ii} d'autre part on obtient la même double somme (les i, j étant des variables muettes), d'où l'on déduit que $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

2. Par l'absurde si il existait M et N telles que $MN - NM = \text{Id}$ alors on aurait $\text{tr}(MN - NM) = \text{tr}(\text{Id})$. Par les deux propriétés de la question précédente on déduit que $\text{tr}(MN - NM) = \text{tr}(MN) - \text{tr}(NM) = 0$, d'où $0 = \text{tr}(\text{Id}) = n$. C'est une contradiction car on a supposé $n \geq 1$. Ainsi il n'existe pas de matrices M et N telles que $MN - NM = \text{Id}$.
3. L'hypothèse implique pour tous i, j entre 1 et n , $\text{tr}(AE_{ij}) = 0$.
Notons a_{ij} les coefficients de A . Fixons i, j . Le calcul du produit AE_{ij} nous donne une matrice ayant toutes les colonnes nulles sauf la colonne i qui est égale à la j ème colonne de A . Ainsi la trace de AE_{ij} est égal à a_{ji} . L'hypothèse implique donc que tous les coefficients de A sont nuls. Ainsi $A = 0$.

4. (a) Il s'agit de montrer que ω_A est linéaire. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\omega_A(\lambda M + N) &= \text{tr}(A(\lambda M + N)) \\ &= \text{tr}(\lambda AM + AN) \\ &= \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(AN) \text{ par linéarité de tr} \\ &= \lambda \omega_A(M) + \omega_A(N)\end{aligned}$$

- (b) Montrons d'abord que Φ est linéaire. Pour tous $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda A + B)(M) &= \omega_{\lambda A + B}(M) \\ &= \text{tr}((\lambda A + B) \cdot M) \\ &= \text{tr}(\lambda AM + BM) \\ &= \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) \\ &= \lambda \cdot \text{Phi}(A)(M) + \Phi(B)(M) \\ &= (\lambda \cdot \Phi(A) + \Phi(B))(M)\end{aligned}$$

On en déduit la linéarité de Φ .

Soit $A \in \ker(\Phi)$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $0 = \Phi(A)(M) = \omega_A(M) = \text{tr}(AM)$. De la question 3 on en déduit que A est nulle. Ainsi Φ est injective.

D'autre part $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ l'est également et ces deux espaces ont la même dimension. On en conclut que Φ est bijective.

5. L'hypothèse implique que pour tous i, j entre 1 et n , $AE_{ij} = E_{ij}A$.

On a vu que AE_{ij} est une matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i ème et elle est égale à la j ème colonne de A .

Le calcul de $E_{ij}A$ nous donne la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i ème qui est égale à la j ème ligne de A .

L'égalité $AE_{ij} = E_{ij}A$ implique pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ et $a_{ii} = a_{jj}$ ce qui signifie que $A = \lambda \text{Id}$ avec $\lambda = a_{ii}$ pour tout i .

6. Procédons par double inclusion. Soit ω dans l'ensemble du bas, i.e. $\omega = \lambda \cdot \text{tr}$ pour un certain scalaire λ . Alors $\omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ puis que $\text{tr} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. De plus pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\omega(MN) = \lambda \text{tr}(MN) = \lambda \text{tr}(NM) = \omega(NM)$. Ainsi ω est dans l'ensemble du haut.

Voyons l'autre inclusion. Soit donc $\omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\omega(MN) = \omega(NM)$ pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 4, il existe une matrice A telle que $\omega = \omega_A$. La condition précédente devient alors : pour tous M, N , $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(NMA)$. Par la question 1, on en déduit que $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(MAN)$ ou encore $\text{tr}(AMN - MAN) = 0$ pour tous M, N .

Ainsi pour tout M fixé on obtient que pour tout N , $\text{tr}((AM - MA)N) = 0$. De la question, 3 on en déduit que $AM - MA = 0$. Ceci ayant lieu pour tout M , on applique la question 5 et on obtient que $A = \lambda \text{Id}$ pour un certain λ .

Pour finir on a : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\omega(M) = \omega_{\lambda \text{Id}}(M) = \text{tr}(\lambda \text{Id}M) = \lambda \text{tr}(M)$. Ainsi $\omega = \lambda \text{tr}$.