Licence ST - Année 2006/2007 - Semestre 2
Examen session 1, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 2h00.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Questions de Cours (sur 6 environ)

1. E étant un **k**-espace vectoriel de dimension finie, justifier que $\dim(E) = \dim(E^*)$.
2. Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension n.
   (a) Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal de E.
   (b) Montrer que si une famille (e_i) à n éléments vérifie $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ alors c'est une base orthonormée de E.
   (c) En déduire que si f est un endomorphisme orthogonal alors l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée.
   (d) Montrer la réciproque, i.e. si un endomorphisme de E envoie une base orthonormée sur une base orthonormée alors il est orthogonal.
3. Donner la définition d'une matrice orthogonale et celle d'une matrice unitaire. Quel est le lien entre $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$?
4. Donner la définition d'une forme sesquilinéaire hermitienne.
5. Soit s une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe E de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. On note S la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$.
   Montrer que s est hermitienne si et seulement si ${}^tS = \bar{S}$.

Exercice 1 (sur 3 environ)
Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculs, donner (en justifiant) le rang de b.
2. Construire une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\mathrm{mat}(b, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (sur 6 environ)

0. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des applications $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$.
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(v) = 2 - y^2 + 4xy$ où $v = (x, y)$. Le but est d'étudier l'application f au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$.
   Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $f(v) = 2 + q(v)$.
   (a) Calculer la matrice hessienne de f (en 0) :
   $$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$
   (b) Comparer avec $\mathrm{mat}(q, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Utiliser la méthode de Gauss pour trouver une base orthogonale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ pour q.
3. En déduire une base $\mathcal{B}''$ telle pour tout v de coordonnées X, Y dans $\mathcal{B}''$ on ait
   $$f(v) = 2 + X^2 - Y^2.$$
4. Faire un schéma dans $\mathbb{R}^3$ représentant le graphe de f au voisinage de 0.

Exercice 3 (sur 6.5 environ)

On fixe un entier $n \geq 1$. On va travailler avec le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ réelles. Dans cet espace vectoriel, pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice ayant tous ses coefficients nuls sauf un 1 en position (i, j).

1. Montrer que l'application trace $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ et que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$. (On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.)
2. En déduire qu'il n'existe pas $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN - NM = \mathrm{Id}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on ait $\mathrm{tr}(AM) = 0$. Montrer que A est nulle. (Indication : utilisez les matrices E_{ij}.)
4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\omega_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\omega_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$.
   (a) Vérifier que $\omega_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
   (b) Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ donnée par $\Phi(A) = \omega_A$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. (Indication : utilisez la question 3.)
5. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM = MA$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda \mathrm{Id}$. (Indication : utilisez les matrices E_{ij}.)
6. Déduire des questions précédentes l'égalité entre les deux ensembles suivants :
   - $\{\omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \mid \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \omega(MN) = \omega(NM)\}$.
   - $\{\lambda \cdot \mathrm{tr};\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.