Licence STS - Année 2007/2008 - Semestre 2
Examen session 1, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 2h00.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{1, i\}$ est une base de E.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ calculer $1^*(x + iy)$ et $i^*(x + iy)$.
3. En déduire que
$$E^* = \{w : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ w(x + yi) = ax + by\}.$$
4. Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel engendré par $v = 1 - i$. Calculer $\mathrm{ann}_{E^*}(F)$. En donner une base exprimée en fonction de 1^* et i^*.

Exercice 2.

1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Rappeler la définition de la codimension de F dans E.
2. Soit $E = \mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $F = \mathbb{R}$. Que vaut $\mathrm{codim}_E(F)$?

Exercice 3. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par :
$$q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 10yz.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Utiliser la méthode de Gauss et donner :
   (a) le rang et la signature de q.
   (b) une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour q.

Tournez la page....

Exercice 4. On rappelle que la trace d'une matrice M, $\mathrm{tr}(M)$, est la somme des élements de sa diagonale principale.

1. Montrer que $b : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $b(A, B) = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$ est un produit scalaire.
2. Pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on note $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant un unique coefficient non nul, ce coefficient étant 1 et se trouvant à la ligne i et la colonne j. Montrer que l'ensemble $\{E_{i,j} |\ (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire b.

Exercice 5.

1. Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (On rappelle que la trace d'une matrice M, $\mathrm{tr}(M)$, est la somme des élements de sa diagonale principale.)

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension n et soit q une forme quadratique sur E. Étant donnée une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, si on note M la matrice de q dans $\mathcal{B}$, on définit le déterminant et la trace de q en posant :

$$\det(q) = \det(M) \text{ et } \mathrm{tr}(q) = \mathrm{tr}(M).$$

2. Montrer que $\det(q)$ et $\mathrm{tr}(q)$ sont bien définis (i.e. ne dépendent pas du choix de la base orthonormée).

Pour un réel x on définit $s(x) \in \{-1, 0, +1\}$ en posant $s(0) = 0$, $s(x) = -1$ si $x < 0$ et $s(x) = +1$ si $x > 0$.

3. On suppose $n = 2$. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E.
   (a) Montrer l'implication :

   $$s(\det(q)) = s(\det(q')) \text{ et } s(\mathrm{tr}(q)) = s(\mathrm{tr}(q')) \Longrightarrow q \text{ et } q' \text{ sont équivalentes.}$$

   (b) L'implication réciproque est-elle vraie ?

   (On pourra utiliser la signature.)