Licence ST - Année 2006/2007 - Semestre 2
Examen session 2, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 1h30.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Questions de Cours

1. E étant un $\mathbf{k}$-espace vectoriel, de base $\mathcal{B} = (b_i, i \in I)$ non nécessairement finie, on définit $\mathcal{B}^* = (b_i^*,\ i \in I) \subset E^*$ en posant pour tout $(i,j) \in I^2$, $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$.
   (a) Pourquoi les b_i^* sont bien définis en tant qu'éléments de E^* ?
   (b) Montrer que $\mathcal{B}^*$ est une famille libre.
   (c) Si $\dim E$ est finie, montrer que $\mathcal{B}^*$ est génératrice de E^* (sans invoquer l'égalité $\dim E = \dim E^*$). On pourra poser $I = \{1, \ldots, n\}$.
   (d) Si $\dim E$ n'est pas finie, montrer que $\mathcal{B}^*$ n'est pas génératrice de E^* (on pourra exhiber un élément de E^* qui n'est pas une combinaison linéaire des b_i^*)
2. On fixe un entier $n \geq 1$. On note $<,>$ le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Soit P une matrice réelle de taille $n \times n$ inversible telle que $P^{-1} = {}^tP$.
      - Que dire de P ?
      - Montrer que les vecteurs colonnes de P forment une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, <,>)$.
   (b) Montrer la réciproque : si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, <,>)$ alors la matrice P dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$ satisfait $P^{-1} = {}^tP$.

Exercice 1

Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
On définit $\Psi : E^* \to F^*$, en posant $\Psi(\omega) = \omega_{|F}$ i.e. la restriction de ω à F.

1. Montrer que Ψ est linéaire et surjective.
2. Déterminer le noyau de Ψ.
3. En appliquant le théorème du rang, montrer que

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(\mathrm{ann}_{E^*}(F)).$$

Exercice 2

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit q une forme quadratique sur E. Soient B et B' les matrices de q dans deux bases de E.
   Montrer que
   (a) $\det(B) = 0 \iff \det(B') = 0$.
   (b) si $\det(B) \neq 0$ alors $\det(B)$ et $\det(B')$ ont le même signe.
2. Soit maintenant q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une certaine base est
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Sans aucun calcul, montrer que q n'est ni positive ni négative.
   (b) Calculer $\det(B)$ et déduire de 2(a) et de 1 la signature de q.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $B = i \cdot A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que B est hermitienne.
2. En déduire que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$^t\bar{A} \cdot A = 0.$$
Le but de l'exercice est de montrer que $A = 0$.
On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hermitien usuel $<,>$ défini ainsi :
$$< x, y >= \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n.$$

1. Montrer que si $y \in \mathbb{C}^n$ satisfait $< y, y >= 0$ alors $y = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a : $< Ax, Ax >= 0$.
3. Conclure.