Licence STS - Année 2007/2008 - Semestre 2
Examen session 2, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur <u>deux pages</u>.
- Durée : 1h30.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Exercice 1. On fixe un entier $n \geq 1$ et on se donne $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & {}^tX \cdot M \cdot X. \end{array}$$

(Comme d'habitude, on a identifié un réel avec une matrice réelle de taille 1×1.)

1. Ici on suppose que M est symétrique.
   (a) Montrer que q est une forme quadratique en exhibant sa forme polaire.
   (b) Démontrer que M est la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
2. Ici on ne suppose pas M symétrique.
   (a) Montrer que si q est une forme quadratique alors sa forme polaire b vérifie

   $$b(X,Y) = \frac{1}{2}({}^tX \cdot M \cdot Y + {}^tY \cdot M \cdot X)$$

   pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
   (b) On définit

   $$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & \frac{1}{2}({}^tX \cdot M \cdot Y + {}^tY \cdot M \cdot X). \end{array}$$

   Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique et en déduire que q est une forme quadratique.
   (c) Démontrer que la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

Exercice 2. Soit c un nombre réel. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base de E et soit q la forme quadratique sur E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

1. Que valent $q(b_1)$ et $q(b_2)$? (Justifier.)
2. Calculer $\det(M)$ en fonction de c.
3. Déduire des questions précédentes la signature de q en fonction de c.

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est antisymétrique alors son déterminant est positif ou nul.

Exercice 4.

1. Donner la définition du dual d'un espace vectoriel E.
2. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (2x + 3y, x + 4y), \end{array}$$

   puis la forme bilinéaire :

$$\begin{array}{rccc} b : & (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (w, v) & \mapsto & w(\phi(v)). \end{array}$$

   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. Calculer la matrice de b relativement à $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}$. A quoi est-elle égale ?
3. Soient E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n et F un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension m, $\mathbf{k}$ étant un corps. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale et soient $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F et $\mathcal{C}^*$ sa base duale.
   Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. On considère la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} b : & F^* \times E & \to & \mathbf{k} \\ & (w, v) & \mapsto & w(\phi(v)). \end{array}$$

   (a) Montrer que $\mathrm{mat}(b, \mathcal{C}^*, \mathcal{B}) = \mathrm{mat}(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.
   (b) En considérant $\gamma : F^* \to E^*$, donnée par $\gamma(w) = b(w, \cdot)$, retrouver le résultat suivant du cours :

$$\mathrm{mat}({}^t\phi, \mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*) = {}^t\mathrm{mat}(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$