

Licence ST - Année 2006/2007 - Semestre 2
Examen partiel, Math IV Algèbre

- Ce document est écrit sur deux pages.
- Durée : 1h30.
- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Questions de Cours (sur 7,5).

1. **(sur 1)** Donner la définition du dual d'un \mathbf{k} -espace vectoriel.
2. **(sur 1)** Montrer que le dual de \mathbb{R}^2 est l'ensemble des applications $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi(x, y) = ax + by$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .
 - (a) **(sur 0,5)** Donner la définition de $\text{codim}(F)$.
 - (b) **(sur 2)** Soit S un supplémentaire de F dans E . Montrer que S et E/F sont isomorphes.
 - (c) **(sur 0,5)** Que peut-on en déduire sur $\text{Codim}(F)$?
4. **(sur 1)** Donner la définition d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique sur un \mathbf{k} -espace vectoriel E .
5. **(sur 1,5)** E étant un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire b . Montrer que b est antisymétrique si et seulement si le cône isotrope $C(b)$ est égal à E .

Exercice 1 (sur 7).

Ici E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[t]$ des polynômes d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à 2. On note \mathcal{B} la base $\{1, t, t^2\}$ de E .

1. **(sur 0,5)** Calculer $I_k = \int_{-1}^1 t^k dt$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. **(sur 1)** Pour $P \in E$, on définit l'application

$$\begin{aligned} \omega_P : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ Q &\mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt. \end{aligned}$$

Montrer que $\omega_P \in E^*$.

3. Pour cette question on fixe $P = 1 + t + t^2$.
 - (a) **(sur 0,5)** Écrire la matrice de ω_P relativement aux bases \mathcal{B} et $\{1\}$ de E et \mathbb{R} respectivement.

(b) **(sur 0,5)** En déduire l'expression de $\omega_P(c_0 + c_1t + c_2t^2)$ avec $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) **(sur 0,5)** Écrire ω_P dans la base duale \mathcal{B}^* de \mathcal{B} .

4. **(sur 2)** Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\rightarrow E^* \\ P &\mapsto \omega_P. \end{aligned}$$

On admet que ψ est linéaire. Montrer que ψ est injective puis conclure (en justifiant !) qu'elle est bijective.

5. Considérons la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} b : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt. \end{aligned}$$

(a) **(sur 1)** Montrer que b est symétrique et calculer sa matrice relativement à la base \mathcal{B} .

(b) **(sur 0,5)** À quoi est égale l'application linéaire à droite $\delta : E \rightarrow E^*$ associée à b ?

(c) **(sur 0,5)** En utilisant les questions précédentes, dire si b est dégénérée ou non ?

Exercice 2 (sur 7 : 1 pt par question sauf la 4).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit q la forme quadratique sur E dont la matrice relativement à \mathcal{B} est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

On note x, y, z les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ relativement à \mathcal{B} .

1. Écrire $q(v)$ en fonction de x, y, z .
2. On désigne par b la forme polaire de q . Pour $v' \in E$, on note x', y', z' ses coordonnées relativement à \mathcal{B} .
Écrire $b(v, v')$ en fonction de x, y, z, x', y', z' .
3. Écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires en x, y, z linéairement indépendantes.
4. **(sur 2)** En déduire une base orthogonale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ en fonction de \mathcal{B} et écrire la matrice de q dans \mathcal{B}' .
5. Quelle est le rang et la signature de q .
6. (Question bonus) Donner une base orthogonale pour la forme bilinéaire b de l'exercice 1.