

Une correction de l'examen de topologie de session 2 (automne 2008/2009)

Questions courtes

3 pts

1. Soient X et Y deux espaces topologiques et $x_0 \in X$. Étant donnée une application $f : X \rightarrow Y$, rappeler la définition de la continuité de f en x_0 .

On dit que f est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.

2. (a) Soient X et Y deux espaces topologiques. On suppose Y séparé. Soit A une partie dense de X (i.e. $\bar{A} = X$). Soient f et g deux applications continues de X vers Y qui coïncident sur A . Montrer que $f = g$.

On va raisonner par l'absurde. Supposons $f \neq g$. Ainsi, soit $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Alors, Y étant séparé, il existe V et V' des voisinages ouverts respectifs de $f(x_0)$ et $g(x_0)$ qui sont disjoints (i.e. $V \cap V'$ est vide). Par continuité de f et g , il existe des voisinages U et U' de x_0 tels que $f(U) \subset V$ et $g(U') \subset V'$. Notons $U'' = U \cap U'$. Il s'agit d'un voisinage de x_0 . La densité de A dans X entraîne que $U'' \cap A$ n'est pas vide (cf. question 3). Soit donc a dans cette intersection. Puisque $a \in A$, on a $f(a) = g(a)$. Mais $a \in U$ donc $f(a) \in V$ et $a \in U'$ donc $g(a) \in V'$. Ayant $f(a) = g(a)$ et $V \cap V' = \emptyset$ ceci est absurde.

- (b) Montrer, via un exemple, que l'assertion précédente peut être fautive si on ne suppose pas Y séparé.

Soit $X = Y = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. On pose $A = \{a\}$ et on munit X et Y de la topologie grossière. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ données par $f(a) = g(a) = a$ et $f(b) = b, g(b) = a$. Les seuls ouverts de Y sont \emptyset et Y . On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(Y) = X$ et de même pour g donc f et g sont continues. D'autre part, le plus petit (et le seul) fermé contenant A est X donc $\bar{A} = X$. Enfin, on voit que f et g coïncident sur A mais ne sont pas égales.

On remarque qu'en effet Y n'est pas séparé.

Exercice 1

4 pts

On définit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ comme suit : $\emptyset \in \mathcal{T}$ et pour tout $U \subset \mathbb{N}$, $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $n \in U$, tout diviseur de n appartient à U .

1. Montrer que \mathcal{T} est une topologie de \mathbb{N} .

Par hypothèse, l'ensemble vide est dans \mathcal{T} . Montrons que \mathbb{N} l'est aussi. Si $n \in \mathbb{N}$ alors tout diviseur de n est, par définition, dans \mathbb{N} donc \mathbb{N} appartient à \mathcal{T} .

Soient $\{U_i, i \in I\}$ une famille d'éléments de \mathcal{T} et U leur réunion. Soit $n \in U$ et m un diviseur quelconque de n , le but étant de montrer que $m \in U$. Il existe un certain $i \in I$ tel que $n \in U_i$. Cet ensemble appartient à \mathcal{T} donc m appartient à U_i et donc à U .

Soit U_1, \dots, U_p un nombre fini quelconque d'éléments de \mathcal{T} . Soit U leur intersection. Soit $n \in U$ et m un diviseur de n . Alors pour chaque $i = 1, \dots, p$, $m \in U_i$ et donc $m \in U$. Ainsi U appartient à \mathcal{T} .

En conclusion, E muni de \mathcal{T} est un espace topologique.

2. Cette topologie est-elle séparée ?

On considère 1 et, par exemple, 5 (n'importe quel nombre fait l'affaire). Tout ouvert U contenant 5 contient également 1 car 1 est un diviseur de 5 ce qui montre qu'il n'existe pas de voisinages disjoints de 1 et 5, d'où on conclut que \mathbb{N} n'est pas séparé.

3. Montrer que $\overline{\{1\}} = \mathbb{N}$ et $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Rappelons que dans un espace topologique E et pour $A \subset E$, $x \in \bar{A}$ si et s.si tout voisinage de x intersecte A . Nous allons utiliser ce fait pour la première égalité.

Soit donc n un élément quelconque de \mathbb{N} et V un voisinage de n . Alors V contient un ouvert qui contient n et comme 1 divise n , 1 appartient à l'ouvert en question et donc à V d'où la conclusion.

Pour la seconde égalité, nous allons montrer que $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un ouvert de \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U_n l'ensemble de tous les diviseurs de n . Montrons que U_n est un ouvert. Soit pour cela $n' \in U_n$ et m un diviseur quelconque de n' . Alors $n' = mk$ pour un certain k et (par définition de U_n) $n = n'k'$ pour un certain k' et par suite $n = m(kk')$ i.e. m est un diviseur de n et donc appartient à U_n . Ainsi U_n est un ouvert de \mathbb{N} .

De plus U_n contient n (car $n = n \cdot 1$) et ne contient pas 0 (car $n = 0 \cdot k$ est impossible). Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est un ouvert contenant n et $U_n \subset \mathbb{N}^*$ ce qui implique que \mathbb{N}^* est un ouvert et par suite $\{0\}$ est fermé donc égal à son adhérence.

Rappel : m est dit diviseur de n s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = mk$.

Exercice 2

3 pts

Soient X et Y deux espaces topologiques.

1. Montrer que si $X \times Y$ est compact alors X et Y le sont.

Montrons que X est compact. L'argument est le même pour Y . Soit $X = \cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement de X par des ouverts de X . Alors on a : $X \times Y = \cup_{i \in I} (U_i \times Y)$. Par compacité de $X \times Y$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini donc il existe J fini dans I tel que $X \times Y = \cup_{i \in J} (U_i \times Y)$. Par suite $X = \cup_{i \in J} U_i$ d'où l'on conclut que X est compact.

Voici une autre variante. La projection canonique $\pi : X \times Y \rightarrow X$ est une surjection continue (cours) et l'image par une application continue d'un compact est compact donc X est compact.

2. Ici on suppose que X et Y sont des espaces métriques. Montrer que si X et Y sont compacts alors $X \times Y$ l'est.

Un espace métrique est compact si et s.si il est séquentiellement compact. De plus, on sait par le cours, que le produit de deux espaces métriques est un espace métrique. Soit donc (z_n) une suite de $X \times Y$. Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ et $y_n \in Y$ tels que $z_n = (x_n, y_n)$. Puisque X est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge dans X vers un certain x . Par compacité de Y la suite $(y_{n_k})_k$ admet un sous-suite $(y_{n_{k_p}})_p$ qui converge vers un certain y .

Par conséquent, la suite $((x_{n_{k_p}}, y_{n_{k_p}}))_p$ converge vers (x, y) dans $X \times Y$. D'où la compacité de $X \times Y$.

Exercice 3

5,5 pts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Étant donnée une suite (u_n) de E , on rappelle que la série des u_n est dite absolument convergente si la suite $(\sum_{n=0}^N \|u_n\|)_N$ admet une limite dans \mathbb{R} quand $N \rightarrow +\infty$.

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence suivante :

E est complet \iff Toute série absolument convergente est convergente.

1. Montrer l'implication " \Rightarrow ".

Soit donc une suite (u_n) de E telle que la série $\sum \|u_n\|$ soit convergente dans \mathbb{R} . Le but est de montrer que la série $\sum u_n$ converge (dans E). Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Le but est de montrer que la suite (S_n) est convergente dans E .

Soient n et m deux entiers tels que $n \geq m$.

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^m u_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=m+1}^n u_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|u_k\| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=0}^n \|u_k\| - \sum_{k=0}^m \|u_k\| = \left| \sum_{k=0}^n \|u_k\| - \sum_{k=0}^m \|u_k\| \right|. \end{aligned}$$

Or par hypothèse, la série $\sum \|u_n\|$ est convergente (dans \mathbb{R}) donc de Cauchy. On en déduit trivialement que la suite (S_n) est de Cauchy dans E . D'où la conclusion voulue par complétude de E .

2. (a) Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E , montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que la série des $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est absolument convergente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, m \geq n_k$, on ait

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Par conséquent, pour tout $k \geq 0$,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Par suite, pour tout $k \geq 0$,

$$\sum_{p=0}^k \|x_{n_{p+1}} - x_{n_p}\| \leq \sum_{p=0}^k \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Ainsi la série qui nous intéresse est majorée par la série (connue) $\sum \frac{1}{k^2}$ qui est convergente d'où la conclusion.

(b) Utiliser la question précédente pour montrer l'implication " \Leftarrow ".

Soit donc (x_n) une suite de Cauchy dans E . Par la question précédente, il existe une sous-suite (x_{n_k}) tel que la série $\sum \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ converge dans \mathbb{R} . Alors, par hypothèse, la série $\sum x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est convergente, autrement dit, la suite $(\sum_{k=0}^p x_{n_{k+1}} - x_{n_k})_p$ est convergente dans E . Mais dans cette suite la plupart des termes s'annulent entre eux et elle est égale à $(x_{n_{p+1}} - x_{n_0})_p$.

Notons $x \in E$ la limite de $(x_{n_{p+1}} - x_{n_0})_p$. Alors $\|x_{n_{p+1}} - x_{n_0} - x\| = \|x_{n_{p+1}} - (x_{n_0} + x)\|$ tend vers 0 ce qui montre que la suite $(x_{n_{p+1}})$ converge vers $x_{n_0} + x$.

Ainsi on a une suite de Cauchy (x_n) dont une sous-suite converge ce qui entraîne que la suite (x_n) converge.

Exercice 4

6,5 pts

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Supposons que la norme satisfait la règle du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in X.$$

Soit A un sous-ensemble fermé de X . On suppose A convexe, i.e., pour tous $x, y \in A$ et $t \in [0, 1]$, on a $tx + (1 - t)y \in A$.

Soit $x_0 \in X$. Le but est de montrer qu'il existe un unique $\alpha \in A$ tel que

$$\|x_0 - \alpha\| = d(x_0, A) := \inf\{\|x_0 - a\| ; a \in A\}.$$

1. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de A telle que $\|x_0 - a_n\|$ converge vers $d(x_0, A)$.

On va utiliser la définition de l'inf. Par définition, pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in A$ tel que

$$d(x_0, A) \leq \|x_0 - a_n\| \leq d(x_0, A) + \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, la suite (a_n) est une suite de A et elle est telle que $\|x_0 - a_n\|$ tend vers $d(x_0, A)$.

2. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|(x - a_m) + (x - a_n)\|^2 + \|a_m - a_n\|^2 = 2(\|x - a_m\|^2 + \|x - a_n\|^2)$$

et en déduire que (a_n) converge vers un élément de A . Nous noterons α cette limite.

On applique l'égalité du parallélogramme avec $x - a_n$ et $x - a_m$ (je vous laisse les détails).

Prenons $x = x_0$ dans l'égalité ci-dessus. On obtient alors :

$$\left\| 2\left(x_0 - \frac{a_m + a_n}{2}\right) \right\|^2 + \|a_m - a_n\|^2 = 2(\|x_0 - a_m\|^2 + \|x_0 - a_n\|^2)$$

puis

$$4 \left\| x_0 - \frac{a_m + a_n}{2} \right\|^2 + \|a_m - a_n\|^2 = 2(\|x_0 - a_m\|^2 + \|x_0 - a_n\|^2).$$

Comme A est convexe, nous avons $\frac{a_m + a_n}{2} \in A$ et par définition de $d(x_0, A)$, nous avons pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$4d(x_0, A)^2 \leq 4 \left\| x_0 - \frac{a_m + a_n}{2} \right\|^2$$

d'où pour tous n, m ,

$$0 \leq \|a_m - a_n\|^2 \leq 2(\|x_0 - a_m\|^2 + \|x_0 - a_n\|^2) - 4d(x_0, A)^2.$$

Le membre de droite peut être rendu aussi petit qu'on veut pourvu que n et m soient assez grand (ceci d'après la question 1) et donc il en est de même pour $\|a_m - a_n\|$ ce qui signifie que la suite (a_n) est de Cauchy. Comme X est complet, cette suite est donc convergente. Enfin, la suite (a_n) étant une suite de A et A étant fermé dans E , on en déduit que la limite de (a_n) est dans A .

3. Montrer que l'application $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $d_{x_0}(x) = \|x_0 - x\|$ est continue et conclure que α satisfait la propriété voulue.

Montrons pour commencer la continuité de d_{x_0} . Pour $x, y \in X$, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|x_0 - x\| = \|x_0 - y + y - x\| \leq \|x_0 - y\| + \|y - x\|.$$

En échangeant les rôles de x et y on obtient :

$$\|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - y\|.$$

d'où en combinant cette inégalité avec la première :

$$-\|x - y\| \leq \|x_0 - x\| - \|x_0 - y\| \leq \|y - x\|.$$

On peut réécrire ceci sous la forme suivante :

$$|d_{x_0}(x) - d_{x_0}(y)| \leq \|x - y\|.$$

Maintenant si (y_n) est une suite qui converge vers y dans E alors l'inégalité

$$|d_{x_0}(y_n) - d_{x_0}(y)| \leq \|y_n - y\|$$

montre que $(d_{x_0}(y_n))$ converge vers $d_{x_0}(y)$ d'où la continuité de d_{x_0} .

La suite (a_n) converge vers α . Par continuité de d_{x_0} , on obtient que $\|x_0 - a_n\|$ tend vers $\|x_0 - \alpha\|$ or d'après la question 1, $\|x_0 - a_n\|$ tend aussi vers $d(x_0, A)$ et par unicité de la limite on obtient : $d(x_0, A) = \|x_0 - \alpha\|$.

4. En utilisant l'égalité du parallélogramme, montrer l'unicité d'un tel α .

Supposons qu'il existe deux éléments α et α' qui répondent au problème, i.e., $d(x_0, A) = \|x_0 - \alpha\| = \|x_0 - \alpha'\|$.

L'égalité du parallélogramme appliquée à $x = x_0 - \alpha$ et $y = x_0 - \alpha'$ nous donne :

$$\|(x_0 - \alpha) + (x_0 - \alpha')\|^2 + \|\alpha - \alpha'\|^2 = 2(\|x_0 - \alpha\|^2 + \|x_0 - \alpha'\|^2)$$

ce qu'on peut écrire :

$$4 \left\| x_0 - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right\|^2 + \|\alpha - \alpha'\|^2 = 4d(x_0, A)^2.$$

Par convexité de A , $\frac{\alpha + \alpha'}{2} \in A$ et par définition de $d(x_0, A)$ on a $\left\| x_0 - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right\| \geq d(x_0, A)$ d'où

$$4 \left\| x_0 - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right\|^2 \geq 4d(x_0, A)^2.$$

Si, par l'absurde, on avait $\alpha \neq \alpha'$ alors on aurait $\|\alpha - \alpha'\|^2 > 0$ et par suite

$$4 \left\| x_0 - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right\|^2 + \|\alpha - \alpha'\|^2 > 4d(x_0, A)^2$$

ce qui contredirait l'égalité ci-dessus.