Université Claude Bernard Lyon I
Licence troisième année : topologie
20 janvier 2009

Examen de topologie

Durée : 2H30. Les documents ne sont pas autorisés

Questions courtes 3 pts

1. Soient X et Y deux espaces topologiques et $x_0 \in X$. Étant donnée une application $f : X \to Y$, rappeler la définition de la continuité de f en x_0.
2. (a) Soient X et Y deux espaces topologiques. On suppose Y séparé. Soit A une partie dense de X (i.e. $\bar{A} = X$). Soient f et g deux applications continues de X vers Y qui coïncident sur A. Montrer que $f = g$.
   (b) Montrer, via un exemple, que l'assertion précédente peut être fausse si on ne suppose pas Y séparé.

Exercice 1 4 pts

On définit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ comme suit : $\emptyset \in \mathcal{T}$ et pour tout $U \subset \mathbb{N}$, $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $n \in U$, tout diviseur de n appartient à U.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie de $\mathbb{N}$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$, muni de cette topologie, est-il séparé ?
3. Montrer que $\overline{\{1\}} = \mathbb{N}$ et $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Rappel : m est dit diviseur de n s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = mk$.

Exercice 2 3 pts

Soient X et Y deux espaces topologiques.

1. Montrer que si $X \times Y$ est compact alors X et Y le sont.
2. Ici on suppose que X et Y sont des espaces métriques. Montrer que si X et Y sont compacts alors $X \times Y$ l'est.

Exercice 3 5,5 pts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Étant donnée une suite (u_n) de E, on rappelle que la série des u_n est dite absolument convergente si la suite $(\sum_{n=0}^{N} \|u_n\|)_N$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $N \to +\infty$.

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence suivante :

E est complet $\iff$ Toute série absolument convergente est convergente.

1. Montrer l'implication "$\Rightarrow$".

2. (a) Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E, montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que la série des $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est absolument convergente.

   (b) Utiliser la question précédente pour montrer l'implication "$\Leftarrow$".

Exercice 4 6,5 pts

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Supposons que la norme satisfait la règle du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in X.$$

Soit A un sous-ensemble fermé de X. On suppose A convexe, i.e., pour tous $x, y \in A$ et $t \in [0,1]$, on a $tx + (1-t)y \in A$.
Soit $x_0 \in X$. Le but est de montrer qu'il existe un unique $\alpha \in A$ tel que

$$\|x_0 - \alpha\| = d(x_0, A) := \inf\{\|x_0 - a\| \,; a \in A\}.$$

1. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de A telle que $\|x_0 - a_n\|$ converge vers $d(x_0, A)$.
2. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|(x - a_m) + (x - a_n)\|^2 + \|a_m - a_n\|^2 = 2(\|x - a_m\|^2 + \|x - a_n\|^2)$$

   et en déduire que (a_n) converge vers un élément de A. Nous noterons α cette limite.
3. Montrer que l'application $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ donnée par $d_{x_0}(x) = \|x_0 - x\|$ est continue et conclure que α satisfait la propriété voulue.
4. En utilisant l'égalité du parallélogramme, montrer l'unicité d'un tel α.