Université Claude Bernard Lyon I
Licence troisième année : topologie
Mardi 14 octobre 2008

Partiel de topologie

Durée : 2H00. Aucun document n'est autorisé

Questions de cours

3pts

1. Soit (X, d) un espace métrique. Donner la définition d'un ouvert de X pour la topologie métrique. (1pt)
2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$ non-vide. Montrer que x appartient à l'adhérence de A si et seulement si tout voisinage de x possède une intersection non-vide avec A. (2pts)

Exercice 1

7pts

On considère l'ensemble de parties de $\mathbb{R}$ suivant :

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} |\, |A^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

où $|A^c|$ désigne le nombre d'éléments dans le complémentaire de A.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie. (1pt)
2. Montrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Laquelle de ces deux topologies est la moins fine ? (1,5pts)
3. Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{R}$ qui induise la topologie $\mathcal{T}$. (*Indication : la topologie est-elle séparée ?*) (1pt)
4. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge pour la topologie usuelle. Est-ce qu'elle converge pour la topologie $\mathcal{T}$? (1pt)
5. $^{\#}$ Soit $x_n = n$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers tout point x de $\mathbb{R}$ pour la topologie $\mathcal{T}$. La suite $(y_n)_n$, où $y_n := (-1)^n$, est-elle convergente pour $\mathcal{T}$? (2,5pts)

Exercice 2

10pts

Soit $X_1 = \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose : $d_1(x, y) = 0$ si $x = y$ et pour $x \neq y$, $d_1(x, y) = |x - y|$ si $x, y \in]-1, 1[$, et $d_1(x, y) = 1$ sinon.

1. Montrer que (X_1, d_1) est un espace métrique. (Remarque : Pour l'inégalité triangulaire il suffit de prendre trois points distincts.) (2pts)
2. Les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$ sont-ils ouverts dans (X_1, d_1) ? Sont-ils fermés ? Déterminer l'adhérence $\bar{A}$ de $A =]0, 1[$ dans (X_1, d_1). (2pts)

Soit $X_2 = \mathbb{R}$ muni avec la distance usuelle $d_2(x, y) = |x - y|$. Sur le produit $X = X_1 \times X_2$ on considère l'application $d : X \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

3. Montrer que d satisfait l'inégalité triangulaire. (Donc elle definit aussi une distance.) (1pt)
4. Déterminer et dessiner les boules ouvertes $B((0, 0), \frac{1}{2})$, $B((\frac{3}{4}, 0), \frac{1}{2})$, $B((1, 0), \frac{1}{2})$ et la boule fermée $\bar{B}((\frac{3}{4}, 0), \frac{1}{2})$ dans (X, d). (2pts)
5. Les suites $\{(1 - \frac{1}{n}, 0)\}$ et $\{(1 + \frac{1}{n}, 0)\}$ sont-elles convergentes ? (Justifier votre réponse.) (2pts)
6. On considère $A = \{1\} \times \mathbb{R} \subset X$. Déterminer la topologie induite $\mathcal{T}_A$. (1pt)