UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

TD 1 : Correction d'exercices

Exercice 3. On rappelle qu'un nombre décimal est un nombre réel pour lequel il existe un développement décimal fini. (On peut aussi définir les nombres décimaux comme les nombres réels qui admettent exactement deux développements décimaux, exemple : $0,257 = 0,256999\cdots$.)

1. Montrer qu'un nombre réel est rationnel si et s. si il admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang. Exemple: $\frac{672}{2475} = 0,27151515\cdots$

   Ici je ne ferai que le cas non traité en TD, à savoir qu'un nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

   Soit donc p/q un nombre rationnel. Quittes à translater ce nombre par un entier, on peut supposer que $p/q \in [0,1[$ ou encore que $p < q$. De plus on peut supposer que $p/q \neq 0$. Écrivons

$$\frac{p}{q} = \sum_{k\geq 1} a_k 10^{-k}, \text{ avec } 0 \leq a_k \leq 9.$$

   Remarquons que si à partir d'un certain rang, les a_k sont tous égaux à 0 ou tous égaux à 9 alors p/q est un nombre décimal et son développement est évidemment périodique à partir du rang en question. On peut donc sans perte de généralité supposer que l'on n'est pas dans ce cas.

   Pour tout entier $m \geq 1$, on peut considérer la division euclidienne suivante :

$$10^m p = qn + r.$$

   Dans une telle division, on a : $r \in \{0, \ldots, q-1\}$, i.e. r ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi il existe des entiers $m, m', n, n' \geq 1$ et un entier $0 \leq r < q$ tels que

$$10^m p = nq + r \text{ et } 10^{m+m'} p = (n+n')q + r.$$

   On soustrait ces deux égalités et on obtient :

$$(10^{m+m'} - 10^m)p = n'q$$

   puis

$$(10^{m+m'} - 10^m)\frac{p}{q} = n' \in \mathbb{N}.$$

   En utilisant l'écriture décimal de p/q, on obtient la suite de relations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} \ni n' &= 10^{m+m'} \sum_{k\geq 1} a_k 10^{-k} - 10^m \sum_{k\geq 1} a_k 10^{-k} \\
&= \sum_{k\geq m+m'+1} a_k 10^{m+m'-k} - \sum_{k\geq m+1} a_k 10^{m-k} \\
&= \sum_{k\geq 1} a_{m+m'+k} 10^{-k} - \sum_{k\geq 1} a_{m+k} 10^{-k}.
\end{aligned}$$

   Ceci est la différence de deux nombres compris strictement entre 0 et 1. Cette différence est entière ce qui implique que ces nombres sont égaux. Rappelons que nous avons supposé que les a_k ne sont pas constants égaux à 0 ou 9 à partir d'un certain rang. Donc les deux nombres précédents ne sont pas décimaux donc leur écriture décimal est unique d'où l'on peut conclure que pour tout $k \geq 1$,

$$a_{m+m'+k} = a_{m+k}.$$

$4^{\#}$. Montrer que $\mathbb{R}$ est complet en utilisant le développement décimal.

Remarques. Dans la suite, je vais utiliser des sous-suites. J'adopterai selon les cas deux notations. Pour une suite (x_n) je noterai $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou bien $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite. Dans le premier cas, il faut comprendre que n_k est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$. Dans le second, φ est une fonction de $\mathbb{N}$ vers lui-même qui est strictement croissante.

Tout d'abord, montrons le résultat intermédiaire suivant : soit (x_n) une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence. Alors (x_n) converge.

Puisque (x_n) admet une valeur d'adhérence, cela signifie qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ et une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$ alors $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ (on comprendra après pourquoi on prend $\varepsilon/2$ au lieu de ε).

D'autre part, la sous-suite (x_{n_k}) converge vers l donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, $|x_{n_k} - l| < \varepsilon/2$.

Soit alors $N' = \max\{N, n_K\}$ et soit $n \geq N'$. Soit k un entier supérieur à K et tel que $n_k \geq N$ (ceci est possible puisque n_k est une suite d'entiers strictement croissante, donc en particulier qui tend vers $+\infty$). On a alors :

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Revenons à la question initiale sur la complétude de $\mathbb{R}$. Nous allons utiliser le résultat précécent et montrer l'existence d'une sous-suite convergente ce qui permettra de conclure immédiatement.

Nous présentons deux variantes:

Variante 1.
Soit donc (x_n) une suite réelle de Cauchy. Par l'exercice 2, la suite (x_n) est bornée. Par l'exercice 11 (question 3) $\limsup x_n$ (qui est donc fini) est une valeur d'adhérence de (x_n).

Variante 2.
Ici, on fait une preuve plus directe et donc aussi plus compliquée. Soit (x_n) une suite réelle de Cauchy.

Dans un premier temps, nous allons montrer qu'on peut se ramener au cas où tous les x_n sont dans $[0, 1[$. Soit $0 < \varepsilon \leq 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon \leq 1$. Ceci entraine en particulier que les x_n (avec $n \geq N$) ne sont pas tous entiers sauf si (x_n) est constante à partir du rang N auquel cas (x_n) est évidemment convergente. Ainsi il existe $N' \geq N$ tel que $x_{N'} \notin \mathbb{N}$. Soit alors $\varepsilon' > 0$ assez petit pour que l'intervalle $]x_{N'} - \varepsilon', x_{N'} + \varepsilon[$ ne contienne aucun entier. Par Cauchy, il existe N'' tel que si $n, m \geq N''$ alors $|x_n - x_m| < \varepsilon'$.
Ainsi en particulier (en prenant $m = N'$) pour tout $n \geq \max\{N', N''\}$, $x_n \in]x_{N'} - \varepsilon', x_{N'} + \varepsilon[$ et donc pour ces n, tous les x_n sont entre deux entiers consécutifs fixés, i.e. par exemple entre j et $j + 1$. Via une translation par $-j$ on peut donc supposer que les x_n sont dans $[0, 1[$. C'est ce que nous supposerons désormais.

Dans la suite nous noterons $d_k(x_n)$ la k-ième décimale de x_n. Ainsi par exemple pour x_0, nous aurons

$$x_0 = \sum_{k\geq 1} d_k(x_0)10^{-k}.$$

Considérons la suite $(d_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite de $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Donc il existe nécessairement une valeur qui est atteinte une infinité de fois. Ainsi il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})$ telle que la première décimale $d_1(x_{\varphi_1(n)})$ est constante. Notons a_1 cette constante.

Considérons la suite $d_2(x_{\varphi_1(n)})$. Comme précédemment, cette suite prend ses valeurs entre les entiers 0 et 9 donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ de la précédente dont la seconde décimale est constante. Notons a_2 cette constante. En fait dans cette sous-suite, non seulement la seconde décimale est constante, mais la première également (puisque c'est une sous-suite de $(x_{\varphi_1(n)})$).

En continuant ainsi on construit, pour tout k, une sous-suite $x_{\varphi_1(\cdots(\varphi_k(n))\cdots)}$ telle que les k premières décimale soient constantes.

Notons alors $l = 0, a_1a_2\cdots$ et notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi_1(\cdots(\varphi_n(n))\cdots)}$. La suite (y_n) est une sous-suite de (x_n) ayant la propriété que les n premiere décimales de y_n sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En conséquence,

$$|y_n - l| \leq 10^{-n},$$

d'où l'on déduit que (y_n) est une sous-suite de (x_n) convergente.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite réelle. On définit

$$\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

1. Justifier l'existence des ces limites.

   Notons dans la suite,

   $$u_n^+ = \sup\{u_k;\ k \geq n\} \text{ et } u_n^- = \inf\{u_k;\ k \geq n\}.$$

   Ce sont des suites prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

   La suite (u_n^+) est ou bien constante égale à $+\infty$ ou bien décroissante dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (dans $\mathbb{R}$ si elle minorée). On fait de même avec (u_n^-) qui est ou bien constante égale à $-\infty$ ou bien croissante dans $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\limsup(-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ et $\liminf(-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.

   On trouve facilement $\limsup u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$.

3. Montrer que $\limsup u_n$ est la valeur d'adhérence maximale de la suite (u_n).
   Remarque : une valeur d'adhérence de (u_n) est la limite d'une sous-suite convergente de (u_n).

   Ici il y a deux choses à montrer. En premier lieu, il faut montrer que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence. En second lieu, il faut montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) lui est inférieure ou égale.

Commençons par montrer que $\limsup u_n$ est bien une valeur d'adhérence de (u_n). Notons $l^+ = \limsup u_n$.

Nous ne traiterons que le cas où l^+ est fini (je vous laisse en exercice le cas où $l^+ = +\infty$).

Soit k un entier positif. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2k}$. Par définition de la limite l^+, il existe un entier N_k tel que pour $n \geq N_k$, $|u_n^+ - l^+| < \varepsilon = \frac{1}{2k}$, autrement dit :

$$\forall n \geq N_k,\ l^+ - \varepsilon < u_n^+ < l^+ + \varepsilon.$$

Posons $n_0 = 0$ et supposons construit (par induction) un entier $n_{k-1} > 0$ tel que $|u_{n_{k-1}} - l^+| < \frac{1}{2(k-1)}$.

Soit alors $n > \max\{N_k, n_{k-1}\}$. Par hypothèse, $u_n^+ = \sup\{u_j | j \geq n\}$. Donc, par définition du sup, il existe $n_k \geq n > n_{k-1}$ tel que

$$u_n^+ - \varepsilon < u_{n_k} \leq u_n^+.$$

En conséquence,

$$|u_{n_k} - l^+| \leq |u_{n_k} - u_n| + |u_n - l^+| < 2\varepsilon = \frac{1}{k}.$$

Ainsi on a construit une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui converge vers l^+ et ce dernier est donc bien une valeur d'adhérence de (u_n).

Montrons maintenant que l^+ est supérieure ou égale à toute autre autre valeur d'adhérence de (u_n). Soit donc α une valeur d'adhérence de (u_n). Soit (u_{n_k}) une sous-suite de (u_n) qui converge vers α.

Pour tout entier $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$ (car n_k est une suite d'entiers strictement croissante) d'où

$$u_{n_k} \leq \sup\{u_j | j \geq k\} = u_k^+.$$

En passant à la limite lorsque k tend vers l'infini, on obtient $\alpha \leq l^+$.

4. Montrer que (u_n) converge (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) si et s. si $\limsup u_n = \liminf u_n$.

   Supposons que les limites inf et sup coïncident. On a de manière triviale que pour tout n,

   $$u_n^+ \leq u_n \leq u_n^-$$

   d'où l'on conclut que (u_n) converge.

   Réciproquement, supposons que (u_n) converge. Notons l sa limite. Alors toute sous-suite de (u_n) converge également vers l. Donc par la question précédente, $\limsup u_n = l$. Comme dans la question précédente on peut montrer que $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n). On en déduit comme précédemment que $l = \liminf u_n$, d'où la conclusion voulue.