

**TD 4 : Corrections d'exercices**  
(Ex. 10; Ex. 7 avec un complément)

**Exercice 10.** Soit  $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\alpha\}$  avec  $\alpha \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Soit  $V : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  défini comme suit.

- Si  $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  alors  $V(x) = \{A \subset X; x \in A\}$ .

- Pour  $A \subset X$ ,  $A \in V(\alpha)$  si et s. si  $\alpha \in A$  et il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $A$  contient tous les éléments de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sauf un nombre fini.

*Remarque : on cherche à définir les voisinages d'une future topologie.*

On définit alors  $\tau \subset \mathcal{P}(X) : A \subset X$  appartient à  $\tau$  si et s. si pour tout  $x \in A$ ,  $A \in V(x)$ .

*Remarque : on cherche à définir les ouverts d'une topologie comme les parties de  $X$  qui sont voisinages de chacun de leurs points.*

1. Montrer que  $(X, \tau)$  est un espace topologique séparé.

Il est d'abord clair que  $E$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $\tau$ . Soient  $U, U' \in \tau$  et montrons que  $U \cap U'$  appartient à  $\tau$ . Pour montrer cela nous devons montrer que pour tout  $x \in U \cap U'$ ,  $U \cap U' \in V(x)$ . Soit donc  $x \in U \cap U'$ . Il y a deux cas :  $x = \alpha$  ou non.

- Cas où  $x \in \mathbb{N}^2$ .

Montrer que  $U \cap U' \in V(x)$  revient, dans ce cas, simplement à montrer que  $x \in U \cap U'$  ce qui est trivialement vrai puisque  $x \in U$  (car  $U \in V(x)$ ) et  $x \in U'$  (car  $U' \in V(x)$ ).

- Cas où  $x = \alpha$ .

Par hypothèse,  $U \in V(\alpha)$  donc il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , tous les éléments de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sauf un nombre fini sont dans  $U$ .

De même, il existe  $N'$  tel que pour tout  $n \geq N'$ , tous les éléments de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sauf un nombre fini sont dans  $U'$ .

Alors en posant  $N'' = \max(N, N')$ , pour tout  $n \geq N''$ , tous les éléments sauf un nombre fini de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sont dans  $U \cap U'$ . On en conclut bien que  $U \cap U' \in V(\alpha)$ .

On peut donc en conclure que  $U \cap U' \in \tau$ .

Je laisse en exercice la vérification de la stabilité de  $\tau$  par réunion quelconque, après quoi on peut conclure que  $(X, \tau)$  est un espace topologique.

Montrons qu'il est séparé. Soient  $x, y$  deux éléments distincts de  $E$ . Encore une fois, deux cas doivent être traités séparément.

- Cas où  $x$  et  $y$  sont tous les deux dans  $\mathbb{N}^2$ .

Dans ce cas en prenant  $U = \{x\}$  et  $V = \{y\}$ , on vérifie que ce sont bien des voisinages (ouverts) respectifs disjoints.

- Cas où  $x \in \mathbb{N}^2$  et  $y = \alpha$ .

On pose  $U = \{x\}$ . Notons  $x = (n_1, n_2)$ . On pose  $V = \{\alpha\} \cup \bigcup_{n \geq n_1+1} (\{n\} \times \mathbb{N})$ .

On vérifie alors que  $U$  et  $V$  sont des ouverts. Ils sont trivialement disjoints et contiennent  $x$  et  $y$  respectivement, d'où la conclusion.

2. Soit  $(u_n)$  la suite de  $X$  ainsi définie :  $u_0 = (0, 0)$ ,  $u_1 = (1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1)$ ,  $u_3 = (2, 0)$ ,  $u_4 = (1, 1)$ ,  $u_5 = (0, 2)$ ,  $u_6 = (3, 0)$ , etc. (On “remonte” ainsi toutes les “diagonales” de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .)

Soit  $S = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Montrer que  $\alpha \in \bar{S}$  mais qu’aucune suite de  $S$  ne converge vers  $\alpha$ .

Remarquons en passant que  $S$  n’est rien d’autre que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Montrons pour commencer que  $\alpha$  appartient à l’adhérence de  $S$ . Pour cela montrons que pour tout voisinage  $V$  de  $\alpha$ , l’intersection  $V \cap S$  est non vide.

Soit donc  $V \in \mathcal{V}(\alpha)$ . Il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $V$  contient tous les éléments de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sauf un nombre fini. Ceci montre trivialement, que  $V \cap S$  est non vide.

Montrons maintenant qu’aucune suite de  $S$  ne converge vers  $\alpha$ . Raisonnons par l’absurde et supposons qu’il existe une suite de  $S$  qui converge vers  $\alpha$ . Sachant que  $S$  est l’ensemble des termes de la suite  $(u_n)$  cela implique qu’il existe une sous-suite de  $(u_n)$ , qu’on note  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , qui converge vers  $\alpha$ .

Notons pour tout  $n$ ,  $u_n = (x_n, y_n)$  avec  $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ .

Remarquons un point important pour la suite. Étant donné un élément  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on peut considérer l’ensemble

$$D_{(p,q)} = \{(p', q') \in \mathbb{N}^2 \mid p' + q' = p + q\}.$$

On peut l’appeler la diagonale de  $(p, q)$ . Par exemple la diagonale de  $(0, 0)$  ne contient aucun autre élément. Autre exemple, la diagonale de  $(1, 1)$  est  $\{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ . Ici la diagonale de  $(1, 1)$  contient  $1 + 1 + 1$  éléments. De façon générale, la diagonale de  $(p, q)$  contient  $p + q + 1$  élément.

Vue la définition de la suite  $(u_n)$ , on peut dire que pour tout  $n$ ,  $D_{u_{n+1}}$  est égale à ou au dessus de  $D_{u_n}$ . Autrement dit, pour tout  $n' \geq n$ ,  $x_{n'} + y_{n'} \geq x_n + y_n$ .

Notons  $S' \subset \mathbb{N}^2$  l’ensemble des termes de la suite  $(u_{n_k})$ .

Montrons le fait suivant : Pour tout  $p_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $p > p_0$  tel que  $(\{p\} \times \mathbb{N}) \cap S' \neq \emptyset$ .

En effet, considérons l’ensemble suivant

$$U = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p > p_0\} \cup \{\alpha\}.$$

Cet ensemble est un voisinage de  $\{\alpha\}$  (preuve facile) donc comme  $(u_{n_k})$  converge vers  $\alpha$  il existe  $K_0$  tel que pour tout  $k \geq K_0$ ,  $u_{n_k} \in U$  ce qui démontre le fait en question.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Définissons  $V_p \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  de la façon suivante :

- Si  $(\{p\} \times \mathbb{N}) \cap S' \neq \emptyset$ . Dans ce cas, soit  $q_p = \min\{q \in \mathbb{N} \mid (p, q) \in S'\}$ . On pose alors  $V_p = \{(p, q) \mid q \geq q_p + 1\}$ .
- Si  $(\{p\} \times \mathbb{N}) \cap S' = \emptyset$ . Dans ce cas, on pose  $V_p = \{p\} \times \mathbb{N}$

Ainsi,  $V_p$  est un sous-ensemble de  $\{p\} \times \mathbb{N}$ . Pour finir on définit :

$$V = \{\alpha\} \cup \bigcup_{p \in \mathbb{N}} V_p.$$

On montre facilement que cet ensemble  $V$  est un voisinage de  $\alpha$ . Par conséquent il existe  $K \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $k \geq K$ ,  $u_{n_k} \in V$  (ceci car la suite  $(u_{n_k})$  converge vers  $\alpha$ ).

Si on note  $p_0 = x_{n_K} + y_{n_K}$  alors en appliquant le fait ci-dessus, il existe  $p > p_0$  tel que  $(\{p\} \times \mathbb{N}) \cap S' \neq \emptyset$ .

Ainsi on peut considérer l'élément  $(p, q_p) \in S'$ . Soit alors  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_k} := (x_{n_k}, y_{n_k}) = (p, q_p)$ .

On a alors :  $x_{n_k} + y_{n_k} = p + q_p \geq p > p_0 = x_{n_K} + y_{n_K}$ . Ceci montre que  $k$  est supérieur ou égal à  $K$  (d'après les remarques sur les diagonales). Par conséquent  $u_{n_k}$  appartient à  $V$ . Or  $(p, q_p)$  n'appartient pas à  $V$  d'où l'absurdité.

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$ . Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales qui converge dans  $E$  vers une fonction non polynomiale. Montrer que la suite des degrés des  $P_n$  tend vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la suite des degrés ne tend pas vers l'infini.

Notons  $d_n = \deg(P_n)$ . Par hypothèse  $(d_n)$  ne tend pas vers l'infini.

Rappelons qu'une suite  $(x_n)$  de  $\mathbb{R}$  tend vers  $+\infty$  signifie la chose suivante : pour tout  $D > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n > D$ .

Ainsi dire que  $x_n$  ne tend pas vers  $+\infty$  se traduit comme suit : il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N$  tel que  $x_n \leq D$ .

C'est ainsi pour la suite  $(d_n)$ . Il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N$  tel que  $d_n \leq D$ .

De ceci, montrons qu'il existe une sous-suite de  $(d_n)$  qui majorée par  $D$ . Pour cela, prenons  $N = 0$  et appliquons le résultat précédent : il existe  $n_0 \geq N$  tel que  $d_{n_0} \leq D$ . Ensuite, prenons  $N = n_0 + 1$  et on obtient qu'il existe  $n_1 > n_0$  tel que  $d_{n_1} \leq D$ . On continue en prenant  $N = n_1 + 1$ , etc. Ceci montre (par récurrence) qu'il existe une suite d'entiers  $(d_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que pour tout  $k$ ,  $d_{n_k} \leq D$ .

Remarque : La suite des  $d_n$  est une suite d'entiers (car ce sont des degrés de polynômes) ainsi les  $d_{n_k}$  appartiennent à l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, E(D) + 1\}$  où  $E(D)$  signifie partie entière du nombre réel  $D$ . Autrement dit, les  $d_{n_k}$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs possibles. Par conséquent, il existe une sous-suite de la suite  $(d_{n_k})$  qui est constante. Autrement dit, il existe une sous-suite de  $(P_n)$  dont le degré est constant. Cette remarque ne nous sera pas indispensable dans la suite.

Quitte à travailler avec  $E(D) + 1$  au lieu de  $D$ , on peut supposer que  $D$  est un entier. Ainsi les  $P_{n_k}$  sont tous de degré  $\leq D$ .

Pour tout  $k$ , notons :

$$P_{n_k} = a_{0,k} + a_{1,k}x + \dots + a_{D,k}x^D.$$

Soient  $x_0, x_1, \dots, x_D \in [0, 1]$  des éléments distincts deux à deux.

Pour  $j = 0, \dots, D$ ,

$$P_{n_k}(x_j) = a_{0,k} \cdot 1 + a_{1,k} \cdot x_j + \dots + a_{D,k} \cdot x_j^D.$$

Ces  $D + 1$  égalités peuvent se traduire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_{n_k}(x_0) \\ P_{n_k}(x_1) \\ \vdots \\ P_{n_k}(x_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^D \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_D & \dots & x_D^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{0,k} \\ a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{D,k} \end{pmatrix}$$

Dans l'égalité ci dessus, notons  $U_k$  le vecteur de gauche,  $M$  la matrice et  $V_k$  le vecteur à droite. La matrice  $M$  est une matrice de Vandermonde qui est inversible (car son déterminant est le produit des  $x_j - x_{j'}$  avec  $j > j'$  donc non nul). Ainsi on peut écrire

$$V_k = M^{-1} \cdot U_k.$$

Or  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une certaine fonction  $f$ . Il en est donc de même de la suite  $(P_{n_k})$ . Or la convergence uniforme implique la convergence simple donc la suite  $(U_k)$  converge dans  $\mathbb{R}^{D+1}$  vers le vecteur

$$F := \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_D) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que la suite  $(V_k)$  converge dans  $\mathbb{R}^{D+1}$  vers  $M^{-1} \cdot F$ . En d'autres, termes pour tout  $j = 0, \dots, D$ , la suite  $(a_{k,j})_k$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers un certain  $a_j$ .

Il reste à montrer que  $f$  est égal à la fonction polynomiale  $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_Dx^D$ .

Ceci est une conséquence directe de la convergence simple de  $(P_{n_k})$  vers  $f$ . En effet pour tout  $x \in [0, 1]$ , la suite  $P_{n_k}(x) = a_{0,k} + a_{1,k}x + \dots + a_{D,k}x^D$  converge vers  $f(x)$  et  $a_0 + a_1x + \dots + a_Dx^D$  qui sont donc égaux.

**Exercice complémentaire.** Nous avons vu en TD que sur un intervalle fermé borné, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonction polynomiale. Sur  $\mathbb{R}$ , la situation est différente, et voici ce qu'on a.

Soit  $P_n$  une suite de polynômes qui converge uniformément vers une fonction continue  $f$ . Alors  $f$  est polynomiale.

Nous allons démontrer ce résultat de deux façons différentes, l'une d'elle en utilisant l'ex. 7 ci-dessus.

Dans les deux variantes, le début est le même. Par hypothèse,  $\|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Or nous savons qu'une suite convergente est de Cauchy (c'est bien entendu l'implication inverse qui n'est pas toujours vraie, d'où l'introduction des espaces complets).

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n, m \geq N$  alors  $\|P_n - P_m\|_\infty < \varepsilon$ . En particulier, cela montre que : pour tout  $n \geq N$ ,  $\|P_n - P_N\|_\infty < \varepsilon$ .

Pour tout  $n$ , notons  $Q_n = P_n - P_N$  (rappelons que  $N$  est fixé). Dire que  $\|Q_n\|_\infty < \varepsilon$  signifie que  $Q_n$  est borné. Or  $Q_n$  est un polynôme et les seuls polynômes bornés sont les polynômes constants (en effet un polynôme de degré  $\geq 1$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ).

En conclusion, on a montré qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , le polynôme  $Q_n = P_n - P_N$  est un polynôme constant.

- Variante 1 : avec l'ex. 7

Raisonnons par l'absurde et montrons que si la fonction limite  $f$  n'est pas polynomiale alors on aboutit à une contradiction.

En effet si  $P_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  alors elle converge uniformément sur  $[0, 1]$ . Puisque  $f$  n'est pas polynomiale, on peut appliquer l'ex. 7 et obtenir que la suite des degrés tend vers l'infini.

Or on a vu que pour  $n \geq N$ ,  $P_n - P_N$  est constant ce qui implique en particulier le degré est constant pour  $n \geq N$ , d'où l'absurdité.

- Variante 2 : sans l'ex. 7

Nous avons montré que pour  $n \geq N$ , le polynôme  $P_n - P_N$  est constant. Ainsi il existe  $y_n \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) - P_N(x) = y_n$ .

Rappelons encore une fois que la convergence uniforme implique la convergence simple donc la suite  $(P_n(0))$  converge dans  $\mathbb{R}$  donc la suite  $(P_n(0) - P_N(0))$  converge, i.e.  $(y_n)$  converge. Notons  $y$  sa limite.

Notons  $Q$  la fonction donnée par  $Q(x) = P_N(x) - y$ . C'est une fonction polynomiale. D'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) - Q(x) = y_n - y$  et ceci tend vers 0. Ainsi  $Q$  est limite simple de  $(P_n)$ . On en conclut que la limite uniforme de  $(P_n)$  est  $Q$ .