UCBL 2007/2008 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Feuille n°4
Complétude

Exercice 1. Établir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique complet. On construit une suite $A_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ telle que $A_{n+1} \subset A_n$ et $r_n \to 0$.

1. Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $\cap_n A_n$ ne contient qu'un seul point. Quel est ce point?

Exercice 3. On note ℓ^∞ l'espace des suites bornées à valeurs réelles muni de la norme $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Montrer que ℓ^∞ est complet.

Exercice 4. On rappelle que $C([0,1])$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, est complet.

1. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme uniforme, n'est pas complet.
2. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est complet.
3. Montrer que $C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, n'est pas complet.

Exercice 5. Soit $c_0 = \big\{(x_n)_n \subset \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\big\}$.

1. Montrer que $c_0 \subset \ell^\infty$.
2. Montrer que c_0 est un espace de Banach.

Exercice 6.
1. Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques qui sont bi-lipschitziens, c.-à.-d. qu'il existe une bijection $f : X_1 \to X_2$ telle que f et f^{-1} soient lipschitziens. Montrer que (X_1, d_1) est complet si et seulement si (X_2, d_2) est complet.
2. Montrer qu'il existe deux espaces métriques homéomorphes dont l'un est complet et pas l'autre. (On pourra considérer l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$.)

Exercice 7. Soit $E = C(]0,1[)$. Pour $n \geq 2$ et $f, g \in E$, on pose

$$d_n(f,g) = \sup_{x\in[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]} |f(x) - g(x)|.$$

1. Si $D_n(f,g) = \dfrac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$, montrer que D_n vérifie l'inégalité triangulaire.
2. Soit $d(f,g) = \sum_{n\geq 2} \frac{D_n(f,g)}{2^n}$. Montrer que d est une distance sur E.
3. Montrer que (E,d) est complet.