UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 1 : Révisions sur $\mathbb{R}$

Exercice 1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, donnée par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, est convergente.

Exercice 2.

1. Montrer que toute suite réelle convergente est bornée
2. Montrer que toute suite réelle de Cauchy est bornée.
3. Montrer que toute suite réelle convergente est de Cauchy.

Exercice 3. On rappelle qu'un nombre décimal est un nombre réel pour lequel il existe un développement décimal fini. (On peut aussi définir les nombres décimaux comme les nombres réels qui admettent exactement deux développements décimaux, exemple : $0,257 = 0,256999\cdots$.)

1. Montrer qu'un nombre réel est rationnel si et s. si il admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang. Exemple: $\frac{672}{2475} = 0,27151515\cdots$
2. Montrer que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres décimaux.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (on pourra par exemple commencer par montrer que $]0,1[$ n'est pas dénombrable).

$4^{\#}$. Montrer que $\mathbb{R}$ est complet en utilisant le développement décimal.

5. $\mathbb{Q}$ est-il complet ?

Exercice 4. Montrer que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Exercice 5. Soit (a_n) une suite réelle telle que $\sum |a_n|$ converge (on dit que la série des a_n est absolument convergente). Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 6. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ pour tout x rationnel. Peut-on conclure que $f = g$?

Exercice 7.

1. Soit (I_n) une suite d'intervalles fermés bornés telle que pour tout n, $I_{n+1} \subseteq I_n$. Montrer que l'intersection des I_n n'est pas vide.
2. Montrer de plus que cette intersection est un singleton si la longueur des I_n tend vers 0.

Exercice 8.

1. Montrer que la série (s_n) définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente mais non absolument.

2. Calculer $s = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.

3. Montrer que $s' = 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ existe et satisfait $s' > s$ (on pourra montrer que $s' > \frac{5}{6} > s$).
   Remarque : dans s' on a réordonné les termes de la première série en prenant deux termes positifs suivis d'un terme négatif.

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n-1}{n})}{n}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente (on pourra utiliser l'exercice 4).

2. Que calcule-t-on lorsqu'on passe à la limite ?

Exercice 10.

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs ou nuls telle que pour tous n, m, $u_{n+m} \leq u_n \cdot u_m$. Montrer que la suite $((u_n)^{\frac{1}{n}})$ est convergente.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$. Montrer que la suite $(\|A^n\|^{\frac{1}{n}})$ admet une limite et que celle-ci est $\max\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite réelle. On définit

$$\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

1. Justifier l'existence des ces limites.

2. Calculer $\limsup(-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ et $\liminf(-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.

3. Montrer que $\limsup u_n$ est la valeur d'adhérence maximale de la suite (u_n).
   Remarque : une valeur d'adhérence de (u_n) est la limite d'une sous-suite convergente de (u_n).

4. Montrer que (u_n) converge (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) si et s. si $\limsup u_n = \liminf u_n$.