UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

# Fiche de TD 2 : Séries - Topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Pour tout $n$, on définit

$$C_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que si $(u_n)$ converge alors $(C_n)$ converge vers la même limite.

**Exercice 2.** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_{>0}$. Soit $l \geq 0$.

1. Montrer cette implication.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = l.$$
*Indication :* on pourra poser $v_n = \ln(u_n/u_{n-1})$ et étudier $\ln((u_n)^{1/n})$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$.

3. Étudier les suites $(u_{n+1}/u_n)$ et $((u_n)^{1/n})$ dans le cas de la suite définie ainsi : $u_{2p} = u_{2p+1} = a^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $a > 0$ est fixé.
Que peut-on dire sur la réciproque de l'implication de la question 1 ?

4. Soit $(u_n)$ définie comme au 3. Étudier la convergence de la série associée.

**Exercice 3.** Rappeler le critère de D'alembert et (re)démontrer sa validité.

**Exercice 4.** Soit $(a_n)$ une suite complexe. On pose

$$R := \frac{1}{\limsup(|a_n|^{\frac{1}{n}})}$$

(on convient que $R = +\infty$ si le dénominateur est 0 et 0 si le dénominateur est $+\infty$).

1. Montrer que $\sum a_n z^n$ converge (absolument) si $|z| < R$ et diverge (grossièrement) si $|z| > R$.
On appelle $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. Montrer que $R = \sup\{|z|;\ z \in \mathbb{C}, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\}$.

3. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$, $\displaystyle\sum z^n$, $\sum n 2^n z^n$, $\sum n! z^n$ ?

**Exercice 5.** Un espace topologique est un couple $(E, T)$ tel que $T \subset \mathcal{P}(E)$ et satisfaisant :
- $E$ et $\emptyset$ appartiennent à $T$,
- une réunion quelconque d'éléments de $T$ est un élément de $T$,
- une intersection finie d'éléments de $T$ est un élément de $T$.

On appelle ouvert de $E$ tout élément de $T$ et fermé de $E$ le complémentaire d'un ouvert de $E$.

On définit $T \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ : pour $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in T \iff$ pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
(Rappel : la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est
$B(a, r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sqrt{\sum_1^n (x_i - a_i)^2} < r\}$.)

1. Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de $T$ est un espace topologique.

2. Montrer que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer qu'une partie $U$ de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si et s. si $U$ est une réunion de boules ouvertes.
4. Montrer qu'une boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^n$
5. Montrer qu'une partie $F$ de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et s. si pour toute suite de $F$ convergente dans $\mathbb{R}^n$, la limite est dans $F$.

**Exercice 6.** On garde les notations de l'exercice 5.

1. Pour $E \subset R$ et $x \in E$, il existe un intervalle ouvert $I_E(x)$ tel que $x \in I_E(x) \subset E$ et tel que si $I'$ est un autre intervalle ouvert tel $x \in I' \subset E$ alors $I' \subset I_E(x)$.

   Pour $x \neq x' \in E$, montrer que si $I_E(x) \cap I_E(x') \neq \emptyset$ alors $I_E(x) = I_E(x')$.
2. Montrer que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.
3. L'assertion suivante est-elle vraie (voir la question 3 dans l'ex. 5) ?
   Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ est une réunion finie ou dénombrable de boules ouvertes.

**Exercice 7.** On note $K$ l'ensemble :

$$\{x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k};\ \forall k, a_k \in \{0, 2\}\}.$$

On appelle $K$ l'ensemble triadique de Cantor.

1. Montrer que $K$ est un fermé de $[0, 1]$.
2. Montrer que $K$ est *négligeable* au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts $\{I_n\}$ de $\mathbb{R}$ tels que :

   $$K \subset \bigcup_n I_n \text{ et } \sum_n l(I_n) < \varepsilon.$$

   Ici $l(I)$ signifie longueur de l'intervalle $I$.
3. Montrer que $K$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.
4. Montrer que $K$ n'est pas dénombrable.
5. Montrer que tout point de $K$ est limite d'une suite de points distincts de $K$.

---

**Exercice 8.** Soit $f : ]0, 1[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f$ est uniformément continue alors $f$ est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 9.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. A-t-on $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ?