UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 3 : Topologie générale - Espace métrique

Exercice 1. Les applications suivantes, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
1. $d_1(x,y) = (x-y)^2$ 2. $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ 3. $d_3(x,y) = |x-2y|$.

Exercice 2. Pour chacune des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, dessiner $\overline{B}(0,1)$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des normes sur $\mathbb{R}$ vu comme espace vectoriel réel.

Exercice 4. Soit X un ensemble muni de deux métriques d_1 et d_2 équivalentes. Montrer que les topologies données par ces métriques sont égales.

Exercice 4'. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2. donnant la même topologie. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
Indication : Considérer l'ouvert $B^{N_1}(0,1)$ (pour quelle topologie ?).

Exercice 4". Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que pour tous $u,v \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(u) = 0 \iff u = 0$, et $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Pour $x,y \in X$, on pose $\delta(x,y) = \varphi(d(x,y))$. Montrer que δ est une distance sur X.
2. On suppose (X,d) non borné (i.e. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x,y \in X,\ d(x,y) > A$). On définit δ sur X^2 en posant $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
   (a) Montrer que δ est une métrique sur X.
   (b) Montrer que d et δ donnent la même topologie sur X.
   (c) Montrer que d et δ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = |x| + |y|$ sinon.

1. Montrer que d est une distance.
2. Déterminer toutes les boules ouvertes et fermées, $B(x,r)$ et $\overline{B}(x,r)$, $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
3. Montrer que $\{0\}$ est fermé mais pas ouvert et pour tout $x \neq 0$, $\{x\}$ est ouvert et fermé.
4. Montrer que toute boule ouverte est un fermé.
5. Comparer $B(2,3)$, $\overline{B}(2,3)$, $\overline{B(2,3)}$, $\overbrace{\overline{B}(2,3)}^{\circ}$.
6. Que peut-on dire d'une suite réelle dont la limite est 1, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance d ?
7. La topologie donnée par d peut-elle être issue d'une norme ?

Exercice 5'. Dans un espace vectoriel normé E, montrer que pour tous $x \in E$ et $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\overline{B}(x,r)}} = B(x,r)$. Est-ce vrai dans tout espace métrique ?

Exercice 6. Soit (E,d) un éspace métrique. Soit (u_n) une suite de E qui converge vers l. Montrer que $\{u_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un fermé de E.

Exercice 7.

1. Quelle est la nature des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ? Décrire leur intérieur, leur adhérence.
2. On considère $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ munis de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Pour ces deux espaces :
   (a) La topologie est-elle séparée ?
   (b) Un singleton est-il ouvert ? Fermé ?
3. Soit $E = \mathbb{N}$ muni de la topologie suivante : pour toute partie F distincte de E et de $\emptyset$, F est un fermé si et seulement si F est un ensemble fini de nombres non nuls. Montrer que E est un espace topologique et que l'adhérence de $\{0\}$ est E.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie. Le but de l'exercice est de montrer que toutes les normes de E sont équivalentes.

1. Ici on montre pour commencer que le résultat est vrai pour $E = \mathbb{R}^n$.
   (a) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un réel C tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) \leq C\|x\|_1$.
   (b) Montrer que tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,
   $$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq C\|x\|_1.$$
   En déduire que N est continue pour la topologie définie par la norme $\| \ \|_1$.
   (c) Montrer que $A := \{x \in \mathbb{R}^n ; \ \|x\|_1 = 1\}$ est compact pour la topologie définie par $\| \ \|_1$.
   (d) Utiliser (b) et (c) pour montrer l'existence de $C' \in \mathbb{R}$ tel que $\| \ \|_1 \leq C'N$.
2. Conclure.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel ayant une base de cardinal au moins dénombrable. Construire deux normes non équivalentes sur E.

Exercice 10. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur réelle muni de la topologie donnée par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $A := \{f \in E ; \ f(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]\}$ est ouvert.
2. Montrer que $B := \{f \in E ; \ \exists x \in [0,1], \ f(x) = 0\}$ est fermé.
3. Déterminer la frontière de $C := \{f \in C([0,1]) | f(0) > 0\}$.
4. Montrer que $A \subset E$ n'est pas ouvert pour la topologie définie par la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.
5. Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont-elles équivalentes ?