

## Fiche de TD 4 : Espace topologique, métrique, normé (suite)

**Exercice 1.** Pour chacune des situations suivantes, donner un exemple d'espace topologique  $X$ .

1.  $X$  est infini et les seules suites convergentes sont constantes à partir d'un certain rang.
2.  $X$  est infini et toute suite converge vers tout point de  $X$ .
3.  $X$  est un espace métrique de cardinal fini  $> 1$  tel que toute suite convergente est constante à partir d'un certain rang.
4.  $X$  est métrique et toute suite admet une valeur d'adhérence.

**Exercice 2.** Soient  $X$  un espace topologique séparé et  $(x_n)$  une suite de  $X$ .

1. Montrer que  $(x_n)$  admet au plus une limite.
2. On suppose qu'il existe un nombre premier  $p > 2$  tel que les suites  $(x_{2n})$ ,  $(x_{2n+1})$  et  $(x_{pn})$  convergent. La suite  $(x_n)$  converge-t-elle nécessairement ?
3. On suppose que pour tout nombre premier  $p$ ,  $(x_{pn})$  converge. La suite  $(x_n)$  converge-t-elle nécessairement ?

**Exercice 3.** Soient  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . On rappelle que la frontière de  $A$  dans  $X$  est  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

1. Montrer que  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$  où  $A^c$  désigne la complémentaire de  $A$  dans  $X$ .
2. Montrer que  $x \in \text{Fr}(A)$  si et s. si pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$  et  $V \cap A^c \neq \emptyset$ .
3. Donner un exemple de topologie sur  $X$  tel que  $\text{Fr}(A) = \emptyset$  pour toute partie  $A$  de  $X$ .
4. Montrer les inclusions  $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subseteq \text{Fr}(A)$  et  $\text{Fr}(\overline{A}) \subseteq \text{Fr}(A)$ . Montrer à l'aide d'un exemple que ces trois ensembles peuvent être distincts deux à deux.

**Exercice 4.** Dans  $\mathbb{R}^n$ , pour un certain  $n$ , muni de sa topologie usuelle, donner un exemple d'une partie  $A$  telle que les ensembles suivants soient distincts deux à deux :  $A$ ,  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{\overline{A}}$ ,  $\overline{\overset{\circ}{A}}$ ,  $\overline{\overline{A}}$ .

**Exercice 5.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $U$  un ouvert de  $X$  et  $A$  et  $B$  des parties de  $X$ .

1. Montrer que si  $A$  est dense dans  $B$  et  $B$  est dense dans  $X$  alors  $A$  est dense dans  $X$ .
2. Montrer que si  $A$  et  $U$  sont dense dans  $X$  alors  $A \cap U$  l'est aussi.

**Exercice 6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $(x_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une suite de  $X$ . On suppose que pour tout  $m$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m,n} = x_m$  et que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ . Montrer que  $(x_{m,n})$  admet une sous-suite de la forme  $(x_{k,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,n_k} = x$ .

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$ . Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales qui converge dans  $E$  vers une fonction non polynomiale. Montrer que la suite des degrés des  $P_n$  tend vers l'infini.

**Exercice 8.** Soit  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$ .

1. Montrer que la suite  $(P_n)$  de fonctions sur  $[-1, 1]$  définie par

$$P_0(t) = 0, P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - P_n^2(t))$$

converge vers  $([-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |t|)$  dans  $E$ .

2. Soient  $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $g$  la fonction affine sur  $[-1, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, 1]$  telle que  $g|_{[-1, x_1]} = 0$  et  $g|_{[x_2, 1]} = y_0$ . Montrer que  $g$  est la somme de deux fonctions "proches" de  $t \mapsto |t|$  et de  $t \mapsto -|t|$  respectivement.
3. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur  $[-1, 1]$  est limite d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[-1, 1]$  à coefficients réels est dense dans  $E$ .
5. En déduire que l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[-1, 1]$  à coefficients rationnels est dense dans  $E$  (on pourra utiliser 4.1).
6. Conclure que  $E$  est séparable (i.e. admet une partie dense et dénombrable).

**Exercice 9.**

1. Soit  $X$  un espace métrique séparable. Montrer que tout ensemble d'ouverts disjoints deux à deux est au plus dénombrable.
2. Soit  $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'espace vectoriel des fonctions complexes continues bornées sur  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$ .
  - (a) Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , soit  $e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par  $e_\alpha(x) = \exp(i\alpha x)$ . Étant donnés deux réels distincts  $\alpha, \beta$ , montrer que  $\|e_\alpha - e_\beta\| = 2$ . (On pourra étudier l'ensemble des  $|e^{i(\alpha-\beta)x} - 1|$ .)
  - (b) En déduire que  $E$  n'est pas séparable.

**Exercice 10\*.** Soit  $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\alpha\}$  avec  $\alpha \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Soit  $V : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  défini comme suit. - Si  $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  alors  $V(x) = \{A \subset X; x \in A\}$ .

- Pour  $A \subset X$ ,  $A \in V(\alpha)$  si et s. si  $\alpha \in A$  et il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $A$  contient tous les éléments de  $\{n\} \times \mathbb{N}$  sauf un nombre fini.

*Remarque : on cherche à définir les voisinages d'une future topologie.*

On définit alors  $\tau \subset \mathcal{P}(X) : A \subset X$  appartient à  $\tau$  si et s. si pour tout  $x \in A$ ,  $A \in V(x)$ .

*Remarque : on cherche à définir les ouverts d'une topologie comme les parties de  $X$  qui sont voisinages de chacun de leurs points.*

1. Montrer que  $(X, \tau)$  est un espace topologique séparé.
2. Soit  $(u_n)$  la suite de  $X$  ainsi définie :  $u_0 = (0, 0)$ ,  $u_1 = (1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1)$ ,  $u_3 = (2, 0)$ ,  $u_4 = (1, 1)$ ,  $u_5 = (0, 2)$ ,  $u_6 = (3, 0)$ , etc. (On "remonte" ainsi toutes les "diagonales" de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .)  
Soit  $S = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Montrer que  $\alpha \in \bar{S}$  mais qu'aucune suite de  $S$  ne converge vers  $\alpha$ .