

Fiche de TD 5 : Continuité

Exercice 1. Ici, \mathbb{R} est muni de la métrique usuelle.

1. Montrer que $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2)$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x})$ est uniformément continue.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur \mathbb{R} . Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = nx$ si $x < \frac{1}{n}$ et $f(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$. Montrer que f_n converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y . Supposons que $X = A \cup B$.

1. Montrer que si f est continue, alors $f|_A$ et $f|_B$ sont continues (A et B sont munis de la topologie induite).
2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.
3. Montrer que si A et B sont ouverts (ou fermés) alors la réciproque est vraie, i.e. si $f|_A$ et $f|_B$ sont continues alors f est continue.

Exercice 4. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice de A , $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, soit continue. On rappelle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

Exercice 5. (E, d) étant un espace métrique, montrer que l'application distance $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 6. Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues.

1. Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E .
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f|_A = g|_A$ alors $f = g$.
3. Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.
4. Montrer que cette implication n'est pas vraie : Γ_f fermé $\implies f$ continue. *Indication* : on pourra considérer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 7.

1. Soient X, Y deux espaces topologiques. On suppose Y séparé. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues.

(a) Montrer que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X .

(b) En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X alors $f = g$.

2. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 f(x)x^n dx = 0$. Montrer que f est nulle.

Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Exercice 8. Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E , on définit la fonction distance à A , $d(\cdot, A) : E \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne (i.e. qu'elle vérifie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in E).$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.

3. Montrer que si F et G sont deux fermés disjoints de E , il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, \quad G \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 9. Soient (E, d) un espace métrique, A et B deux fermés disjoints de E . Montrer qu'il existe une fonction continue $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\varphi|_A = 1, \quad \varphi|_B = 0, \quad \text{et } 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ sur } E.$$

Exercice 10. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $c \in [0, 1]$, on considère

$$\begin{aligned} \delta_c : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(c). \end{aligned}$$

Montrer que δ_c est linéaire, continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 11. Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $F = (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $D : E \rightarrow F$ l'application dérivée, i.e. $D(f) = f'$.

1. Montrer que D est continue si E est muni de la norme suivante : $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

2. Montrer que D n'est pas continue si on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12. Soient $A = [0, 1] \cup \{2\}$ et $B = [0, 1]$ deux parties de \mathbb{R} munies de la topologie induite. Soit $f : A \rightarrow B$ donnée par $f(2) = 1$ et $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$. Montrer que f est continue et bijective mais n'est pas un homéomorphisme.