UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 6 : Compacité

Exercice 1. Dans un espace topologique X (séparé), une partie A est dite compacte si pour toute famille d'ouverts U_i de X si $A \subset \bigcup_i U_i$ alors A est inclus dans une réunion finie de ces U_i.
Montrer que A est une partie compacte si et s. si A (muni de la topologie induite) est un espace compact.

Exercice 2.

1. Dans un espace topologique X (séparé), soit (x_n) une suite convergente vers l. Montrer que $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.
2. Les ensembles $]0,1]$ et $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, sont-ils compacts ?
3. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que si X est compact alors pour tout $x_0 \in X$, il existe $r > 0$ tel que $X = B(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r)$. La réciproque est-elle vraie ?
4. Un espace vectoriel normé réel ou complexe non nul peut-il être compact ?

Exercice 3. Soient X, Y deux espaces topologiques avec Y séparé. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si K est une partie compacte de X alors $f(K)$ est compact.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que la boule unité fermée est compacte si et s. si la sphère unité est compacte.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe. Montrer l'équivalence entre :
(a) E est de dimension finie.
(b) La boule fermée unité $\overline{B}(0,1)$ est compacte.
Indication pour b⇒a : Recouvrir $\overline{B}(0,1)$ par les boules ouvertes $B(x, 1/2)$ avec $x \in \overline{B}(0,1)$. En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel de dimension finie F tel que $B(0,1) \subset F + \frac{1}{2}B(0,1)$. En déduire que $B(0,1) \subset \overline{F}$.

Exercice 6. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de déterminant 1 est-il un compact ? Est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales (i.e. telles que ${}^tA \cdot A = \mathrm{Id}$) est compact.

Exercice 7. Soient A, B deux parties compactes d'un espace topologique (séparé). Montrer que $A \cup B$ est compact.

Exercice 8. Dans un espace vectoriel normé E, soient A et B deux parties compactes. Soit K la réunion des segments $[a,b]$ avec $(a,b) \in A \times B$. Montrer que K est compact.

Exercice 9. Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$.

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

Exercice 10. Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ tels que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in K$.

1. En considérant la suite $(f^n(x))_n$, montrer qu'il existe une sous-suite $(n_k)_k$ de $\mathbb{N}$ telle que $(n_{k+1} - n_k)_k$ est une suite strictement croissante et $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$ existe.
2. En déduire que $\lim_{k\to\infty} f^{n_{k+1}-n_k}(x) = x$.
3. En déduire que f est surjective
4. Montrer que f est bijective.

Exercice (Compacité et complétude). Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes.

(a) X est compact.

(b) X est complet et pour tout $r > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r.