UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 7 : Complétude

Exercice 1. Dans les trois cas suivants, $\mathbb{R}$ muni de la métrique d est-il complet ?

1. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Exercice 2. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X muni de la topologie induite.

1. Montrer que si A est complet alors A est fermée dans X.
2. Montrer que si X est complet et A fermée dans X alors A est complet.

Exercice 3. Soient X un ensemble, d et d' deux métrique équivalentes sur X. Montrer que (X, d) est complet si s. si (X, d') l'est.

Exercice 4. On considère l'ensemble $X =]0, +\infty[$ muni des métriques d et d' definies ainsi : $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$. Montrer que (X, d) et (X, d') sont homéomorphes, que (X, d') est complet mais que (X, d) ne l'est pas.

Exercice 5*. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et soit $f : X \to X'$ une application. On suppose que toute suite de Cauchy de X s'envoit par f sur une suite de Cauchy de X'. Montrer que f est continue.

Exercice 6. Le but de l'exercice est de montrer que $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach. Soit (f_n) une suite de Cauchy de E.

1. Montrer que (f_n) est simplement convergente. On notera f la limite (simple).
2. Montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de (f_n) converge uniformément vers f.
3. Conclure.

Exercice 7. Soit $E = (l^1, \|\cdot\|_1)$.

1. Soit $\{(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}} | m \in \mathbb{N}\} \subset E$ une suite de Cauchy. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\alpha_n = \lim_{m\to\infty} a_n^{(m)}$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

3. Montrer que la suite $\{(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

1. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

   Vérifier que $f_n \in E$. Tracer les courbes de f_n et f_m sur le même dessin, pour $n \leq m$, et répresenter $\|f_n - f_m\|_1$ comme l'aire d'une figure géométrique du plan. La calculer géométriquement et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E.

2. Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f dans E alors $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $f = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

   En déduire que l'espace E n'est pas complet.