UCBL 2009/2010 - Semestre d'automne
Licence STS, L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 8 (Corrigée) : Connexité

Exercice 1 (Définition - Rappels). Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes. Par définition, X est dit **connexe** si ces assertions sont satisfaites.

1. X n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.
2. X n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.
3. Les seules parties de X qui sont ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.
4. Toute fonction continue de X vers $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète est constante.

La preuve de (1) $\iff$ (2) est triviale (il suffit de passer aux complémentaires). Montrons (1) $\Rightarrow$ (3). Soit U une partie de X à la fois ouverte et fermée. Alors X est la réunion disjointe de U et $X \setminus U$ qui sont deux ouverts. Par (1), l'un des deux est necessairement vide ce qui montre que $U = \emptyset$ ou $U = X$.
Montrons (3) $\Rightarrow$ (4). Soit donc $f : X \to \{0,1\}$ continue avec $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète. Par conséquent, $\{0\}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\{0,1\}$. Par continuité, $f^{-1}(0)$ est à la fois ouvert et fermé dans X. Par conséquent $f^{-1}(0)$ est égal à X ou bien $\emptyset$. Dans le premier cas, f est constante égale à 0 et dans le second cas f est constante égale à 1.
Pour finir, montrons l'implication (4) $\Rightarrow$ (1). Soient U, V deux ouverts disjoints de X tels que $X = U \cup V$, le but étant de montrer que l'un d'eux est nécessairement vide. La fonction $f : X \to \{0,1\}$ donnée par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ sinon est alors continue (avec $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète). Par hypothèse, f est constante ce qui montre que U ou V est égal à X ou encore que U ou V est vide.

Exercice 2. Soit X un espace topologique. Soient A et Y deux parties de X telles que $A \subset Y$. Montrer que si A est connexe dans Y alors A est connexe dans X.

Ici la phrase "A est connexe dans Y" est à comprendre au sens suivant : A muni de la topologie induite par Y est connexe. Pour la preuve, soient U et V deux ouverts de A pour la topologie induite par X tels que $A = U \cap V$, $U \cap V = \emptyset$, le but étant de montrer que l'un d'eux est vide. Par définition de la topologie induite, il existe deux ouverts U', V' de X tels que $U = A \cap U'$ et $V = A \cap V'$. Comme A est inclus dans Y, on peut écrire $A = A \cap Y$. Par conséquent, $U = A \cap (U' \cap Y)$ et $V = A \cap (V' \cap Y)$. Ainsi A est la réunion de deux ouverts pour la topologie induite par Y qui sont disjoints. Par hypothèse l'un des deux est vide.

Exercice 3 (classique). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Le but est de montrer que f est (strictement) monotone.

1. Montrer que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ est un connexe de $\mathbb{R}^2$.

   On peut facilement montrer que C est convexe donc connexe par arcs et donc connexe.

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(x,y) = f(x) - f(y)$. Considérer $F(C)$ pour conclure.

   L'application F est continue. En effet $F = f \circ p_1 - f \circ p_2$ où p_1 et p_2 sont les projections naturelles de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. L'image d'un connexe par une application continue est connexe donc $F(C)$ l'est. Par l'absurde supposons que $0 \in F(C)$. Alors il existe $(x,y) \in C$ tel que $0 = F(x,y) = f(x) - f(y)$. Par injectivité de f cela signifie que $x = y$ ce qui est absurde puisque $(x,y) \in C$. Ainsi $0 \notin F(C)$. Or toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle (de longueur finie ou non). On en déduit que soit $F(C) \subset \mathbb{R}_{>0}$ soit $F(C) \subset \mathbb{R}_{<0}$ ce qui implique dans les deux cas la monotonie de f.

Exercice 4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il connexe par arcs ? Est-il connexe ?

La réponse est non aux deux questions. Voyons la connexité par arcs. Par l'absurde si $\mathbb{Q}$ l'était il existerait une application continue $c : [0,1] \to \mathbb{Q}$ telle que $c(0) = 1$ et $c(1) = 2$ (puisque 1 et 2 appartiennent à $\mathbb{Q}$). L'image de c serait donc un connexe dans $\mathbb{Q}$ contenant 1 et 2. En utilisant l'exercice 1 on obtient que $c([0,1])$ serait en fait une partie connexe de $\mathbb{R}$ contenant 1 et 2, i.e. ce serait un intervalle contenant 1 et 2 donc contiendrait $\sqrt{2}$ ce qui est absurde.

Pour nier la connexité, on a

$$\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}),$$

ce qui montre qu'on peut écrire $\mathbb{Q}$ comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides de $\mathbb{Q}$.

Exercice 5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie associée à n'importe quelle norme (elle sont toutes équivalentes), montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Considérons l'application $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ donnée par $P(z) = \det(zB + (1-z)A)$. Par définition du déterminant, cette application est un polynôme en z. De plus $P(0) = \det(A) \neq 0$ donc P est un polynôme non nul. Notons $z_1, \dots, z_r$ les racines de P. On a $P(0) = \det(A) \neq 0$ et $P(1) = \det(B) \neq 0$ donc 0 et 1 ne font pas partie des z_k. Il existe alors une fonction continue $e : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ tel que $e(0) = 0$ et $e(1) = 1$ (intuitivement on dit qu'il existe un chemin reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C}$ et qui ne passe par aucun z_k).

On considère alors $c : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par $c(t) = e(t)B + (1-e(t))A$. On constate que c est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (ceci car $\det(c(t)) = P(e(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$) et que $c(0) = A$ et $c(1) = B$.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe car on peut l'ecrire comme union disjointe de deux ouverts non vides : $U = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) > 0\}$ et $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) < 0\}$. Ce sont bien des ouverts car, par exemple, A est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_{>0}$ par l'application continue det.

Remarque. On peut directement montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. L'idée est de considérer A de déterminant positif et B de déterminant négatif. Par l'absurde on suppose la connexité par arcs, il existe alors un chemin $c : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $c(0) = A$ et $c(1) = B$. Par suite l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f = \det \circ c$ est continue. On a alors $f(0)$ et $f(1)$ de signe opposé ce qui par le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de t_0 tel que $f(t_0) = 0$. La matrice $c(t_0)$ est alors de déterminant nul ce qui est absurde.

Exercice 6. Soient deux espaces topologiques homéomorphes. On rappelle que l'un est connexe (par arcs) si et s. si l'autre l'est.

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ (avec $n > 1$) ne sont pas homéomorphes.

   Par l'absurde s'il existait un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alors $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ serait homéomorphe à $V = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$. Or U est connexe par arcs. Ceci impliquerait que V serait connexe (par arcs) ce qui est absurde connaissant les connexes de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que le cercle unité S^1 de $\mathbb{C}$ n'est pas homéomorphe à un segment de $\mathbb{R}$.

   On fait la même preuve. Par l'absurde, s'il existait un homéomorphisme entre S^1 et un segment I alors S^1 privé d'un point serait homéomorphe à I privé d'un point. Or le premier est connexe (par arcs) et le second non connexe d'où l'absurdité.

Exercice 7 (Connexité et Connexité par arcs). On sait par le cours que la connexité par arcs entraine la connexité et que pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$ les deux notions se confondent. L'objet de l'exercice est de donner un exemple (classique) d'un connexe qui n'est pas connexe par arcs.

Soient $A = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1\}$ et $F = \overline{A} \subset \mathbb{R}^2$ (F est l'adhérence de A dans $\mathbb{R}^2$).

1. Montrer que
$$F = A \cup \{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}.$$

2. Montrer que F est connexe.

3. Montrer que F n'est pas connexe par arcs.

Correction.

1. Montrons l'inclusion $\subset$. Soit $(x,y) \in F = \bar{A}$. Alors il existe une suite $((x_n, y_n))$ de A qui converge vers (x,y). Si $x > 0$ alors $y_n = \sin(1/x_n)$ converge vers $\sin(1/x)$ (par continuité de sin) d'où $(x,y) \in A$. Dans le cas $x = 0$, on a $y_n = \sin(1/x_n)$ d'où $y_n \in [-1,1]$. Par conséquent, à la limite on a $y \in [-1,1]$. D'où $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$.

   Montrons l'inclusion $\supset$. Soit (x,y) dans le membre de droite, le but étant de montrer qu'il existe une suite $((x_n, y_n))$ de A qui converge vers (x,y). Si $x > 0$, une telle suite existe trivialement (il suffit de prendre la suite constante égale à (x,y)). On suppose donc $x = 0$. Ainsi $y \in [-1,1]$ est quelconque. Soit $z \geq 1$ tel que $\sin(z) = y$. Soit alors $x_n = 1/(z + 2\pi n)$. On aura $\sin(1/x_n) = \sin(z) = y$ Par conséquent la suite $(x_n, \sin(1/x_n))$ est une suite de A qui tend vers $(0,y)$ d'où l'inclusion voulue.

2. L'ensemble A est connexe dans $\mathbb{R}^2$ comme image du connexe $]0,1]$ par l'application continue $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $F(x) = (x, \sin(1/x))$. Par le cours, l'adhérence F de A est connexe.

3. Par l'absurde, supposons F connexe par arcs. Il existe $c : [0,1] \to F$ continue tel que $c(0) = (1, \sin(1))$ et $c(1) = (0,0)$. Notons $c(t) = (x(t), y(t))$.

   Notons $T_0 = \{t \in [0,1] | x(t) > 0\}$. Cet ensemble est non vide puisque $0 \in T_0$. On considère alors $t_0 = \sup(T_0)$.

   Par l'absurde, supposons $x(t_0) > 0$. Alors par continuité de x, on aurait $x > 0$ sur un voisinage de t_0 ce qui en contredit la définition. Par conséquent $x(t_0) = 0$. Ainsi par continuité de x en t_0, on a : $\lim_{t \to t_0} x(t) = 0$. Ainsi il existe une suite (τ_n) qui tend en croissant vers t_0 telle que la suite $(x(\tau_n))$ tend en décroissant vers 0.

   Notons $c(t_0) = (0, y_0)$. Soit $y \in [-1,1] \smallsetminus \{y_0\}$. Soit $z > 0$ tel que $\sin(z) = y$. Pour tout n, il existe un entier k_n assez grand pour que $x_n := 1/(2\pi k_n + z) < x(\tau_n)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à x, il existe $t_n \in [\tau_n, t_0]$ tel que $x(t_n) = x_n$. On a alors $c(t_n) = (x_n, \sin(2\pi k_n + z)) = (x_n, y)$. Ainsi la suite t_n tend vers t_0 et $c(t_n)$ tend vers $(0,y) \neq c(t_0)$. Contradiction.