Expaces connexes

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces connexes de X. On suppose que $\forall\, n \geq 0$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 2. Soit A une partie non vide, ouverte et fermée dans un espace métrique (X, d). Soit $a \in A$ et $\mathcal{C}_a$ la composante connexe de X contenant a. Montrer que $\mathcal{C}_a \subset A$. En déduire que tout ensemble $A \subset X$ qui non vide, ouvert, fermé et connexe est une composante connexe de X.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = R\}$, où $R > 0$. Montrer que E présente deux composantes connexe, $E_1 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < R\}$ et $E_2 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 > R\}$.

Exercice 4. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est non-borné.
(*Indication :* Utiliser que le complémentaire d'un disque de $\mathbb{R}^2$ est connexe).

Exercice 5. Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par les segments $I_n = [0, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, où $n = 1, 2, \ldots$ et des points $P_0 \equiv (0, 0)$ et $P_1 \equiv (1, 0)$.

1. Montrer que les composantes connexes de X sont les I_n et $\{P_0\}$, $\{P_1\}$.
2. Soit A une parte ouverte et fermé de X, contenant P_0. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A contient I_n pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de compactes connexes non vides. Montrer que $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$ est compact et non vide. Montrer que K est connexe (*Indication :* utiliser que tout ouvert de X contenant K, contient aussi K_n, si n est suffisament grand).

Exercice 7. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \quad \text{implique} \quad \exists\, c \in F \quad \text{telque} \quad a < c < b. \tag{$*$}$$

1. Montrer que F un intervalle fermé. (*Indication :* utiliser que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. On appliquera cette propriété à un ouvert de la forme $]a, b[\cap F^c$).
2. Soit $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(1 - f') = 0$. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ possède la propriété $(*)$. En déduire que $f = 0$ ou $f' = 1$.

Exercice 8. On dit qu'un espace métrique (X, d) vérifie la propriété du point fixe (PF), si toute fonction $f \in C(X, X)$ a au moins un point fixe dans X.

1. Montrer que tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vérifie (PF). Montrer que les autres intervalles de $\mathbb{R}$ ne vérifient pas (PF).
2. Montrer que si X vérifie (PF), alors X est connexe.
3. Montrer que si $X = Y \cup Z$, et Y, Z sont deux fermés de X vérifiant (PF), et d'intersection réduite à un seul point, alors X vérifie (PF).

Exercice 9. Montrer qu'un espace métrique connexe ayant au moins deux éléments est non-dénombrable.

Exercice 10. Soit $R > 0$. Montrer que dans un espace vectoriel normé $E, ||\cdot||)$ de dimension ≥ 2, la sphère $S(0, R)$ est connexe par arcs. En déduire que $B(0, R)^c$ et $E\backslash\{0\}$ sont connexes par arcs.

Exercice 11. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E de dimension ≥ 2.

1. Montrer que K^c a une composante connexe C non bornée.
2. Soit $a \in C$ et $S(a, R)$ une sphère de grand rayon contenue dans $(K \cap \mathcal{C})^c$. Montrer que l'application $p \colon K \to S(a, R)$ définie par $p(x) = a + \frac{R(x-a)}{||x-a||}$ est une surjection continue.

3. Montrer que E est de dimension finie. En déduire que si K est un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors K^c est connexe.

Exercice 12. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et U un ouvert de E. Montrer que U est connexe si et seulement si :

$$\forall\, x, y \in U \quad \exists\, x_1, \ldots, x_n, \quad \text{avec} \quad x = x_1,\ x_n = y_n \quad \text{et} \quad [x_{i-1}, x_i] \subset U.$$

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \colon x > 0\}$. Montrer que A est connexe. En déduire que $A \cup \{(0,0)\}$ est connexe. Montrer que $A \cup \{(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.
(*Indication :* utiliser que si $f \colon [a, b] \to A \cup \{(0,0)\}$ est un arc tel que $f = (f_1, f_2)$ et $f(a) = (0,0)$, $f(b) \neq (0,0)$, alors il existe une suite $t_n \to a$ telle que $f_1(t_n) = \frac{2}{\pi + 2n\pi}$).