

### Fiche de TD 1 : Révisions sur $\mathbb{R}$

**Exercice 3.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

2\*. Montrer que  $f$  est uniformément continue.

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. La continuité de  $f$  entraîne ceci : Pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\delta_x$  (il dépend de  $x$  d'où la notation) tel que si  $y \in [a, b]$  satisfait  $y \in ]x - \delta_x, x + \delta_x[$  alors  $f(y) \in ]f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2[$  (on applique la continuité de  $f$  en  $x$  avec  $\varepsilon/2$ ).

On a  $[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} ]x - \delta_x/2, x + \delta_x/2[$ . La compacité de  $[a, b]$  entraîne qu'il existe  $x_1, \dots, x_n \in$

$[a, b]$  tels que  $[a, b] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} ]x_i - \delta_{x_i}/2, x_i + \delta_{x_i}/2[$ .

Soient maintenant  $x, y \in [a, b]$  tels que  $|x - y| < \delta$  le but étant de montrer que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x \in ]x_i - \delta_{x_i}/2, x_i + \delta_{x_i}/2[$  (un tel  $i$  existe par le recouvrement fini obtenu précédemment). On a alors  $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ .

D'autre part,  $|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| \leq \delta + \delta_{x_i}/2 \leq \delta_{x_i}$ . Par conséquent,  $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ .

Finalement, on obtient :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Exercice 6.**

1. Soit  $(I_n)$  une suite d'intervalles fermés bornés telle que pour tout  $n$ ,  $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Montrer que l'intersection des  $I_n$  n'est pas vide.

Notons, pour chaque  $n$ ,  $I_n = [a_n, b_n]$  (avec bien sûr  $a_n \leq b_n$ ). La relation  $I_{n+1} \subset I_n$  entraîne  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Ainsi, la suite  $(a_n)$  est croissante et la suite  $(b_n)$  est décroissante. De plus  $(a_n)$  est majorée, par exemple, par  $b_0$ . De même  $(b_n)$  est minorée par  $a_0$ . Ces deux suites sont donc convergentes. Notons  $a$  et  $b$  leur limite respective.

Pour tout  $n$  (fixé) et pour tout  $k \geq n$ ,

$$a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n.$$

Quand  $k$  tend vers l'infini, on obtient :

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Ceci étant vrai pour tout  $n$ , on obtient que  $a$  et  $b$  appartiennent à l'intersection des  $I_n$ , qui est donc non vide.

2. Montrer de plus que cette intersection est un singleton si la longueur des  $I_n$  tend vers 0.

Soit  $x$  dans l'intersection des  $I_n$ . Alors pour tout  $n$ ,  $a_n \leq x \leq b_n$ . Dire que la longueur des  $I_n$  tend vers 0 signifie que la suite  $(b_n - a_n)$  tend vers 0. Cela entraîne que  $a = b$ .

Passons à la limite. Les inégalités  $a_n \leq x \leq b_n$  donnent alors  $b = a \leq x \leq b = a$ . Cela entraîne le résultat voulu.

**Exercice 7.**

1. Montrer que la série  $(s_n)$  définie par  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  est convergente mais non absolument.

Pour commencer montrons que la série n'est pas absolument convergente, i.e. la suite de termes  $t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  n'est pas convergente. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$t_{2n} - t_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Cette inégalité entraîne que la suite  $(t_n)$  n'est pas de Cauchy et ne converge pas.

La convergence de la suite  $(s_n)$  est une application directe du critère de convergence des suites alternées : en effet notre série est de la forme  $\sum (-1)^k a_k$  où  $(a_n)$  est une suite décroissante qui converge vers 0.

2. Calculer  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ .

Pour commencer on remarque que :  $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ . D'autre part,  $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$ .

Ainsi,

$$s_n = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \right) dt.$$

Or  $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$  (formule donnant les premiers termes d'une suite géométrique) donc

$$s_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

On a :  $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2)$ . Par conséquent,

$$|s_n - \ln(2)| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

On conclut que  $(s_n)$  converge vers  $\ln(2)$ .

3. Montrer que  $s' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$  existe et satisfait  $s' > s$  (on pourra montrer que  $s' > \frac{5}{6} > s$ ).

*Remarque :* dans  $s'$  on a réordonné les termes de la première série en prenant deux termes positifs suivis d'un terme négatif.

Pour  $n \geq 1$ , notons

$$z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}.$$

On remarque que  $z_n = s'_{3n}$ . De plus  $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k-1)2k} \cdot (8k+3)$ . Ainsi  $(z_n)$  est une suite croissante et le terme général est un  $O(\frac{1}{4k^2})$  donc  $(z_n)$  se comporte comme la série bien connue  $\sum \frac{1}{k^2}$ . Donc  $(z_n)$  (i.e.  $(s'_{3n})$ ) converge.

D'autre part  $s'_{3n+1} = z_n + \frac{1}{4n+1}$  et  $s'_{3n+2} = s'_{3n+1} + \frac{1}{4n+3}$ .

Comme bilan, on obtient que la suite  $(s'_n)$  a trois sous-suites  $(s'_{3n})$ ,  $(s'_{3n+1})$  et  $(s'_{3n+2})$  qui convergent toutes vers une même limite. Cela entraîne (**à vérifier en exercice**) que  $(s'_n)$  converge vers cette même limite. Notons  $s'$  cette limite.

On voit alors facilement que :

$$s' \geq s_3 = \frac{5}{6} > \ln(2) \quad \text{car } \frac{5}{6} \simeq 0,83 \text{ et } \ln(2) \simeq 0,69$$

Ainsi  $(s_n)$  et  $(s'_n)$  convergent vers deux limites distinctes.

**Exercice 8.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$u_n = \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n})}{n}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente (on pourra utiliser l'exercice 3).

On va montrer que la suite  $(u_n)$  est de Cauchy ce qui montrera qu'elle converge. On fixe donc  $\varepsilon > 0$ . Par l'ex. 3, on sait que  $f$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $x, y \in [0, 1]$ , si  $|x - y| < \delta$  alors  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$  (on comprendra plus loin pourquoi on coupe  $\varepsilon$  en deux).

Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{N} < \delta$  et soient  $n, m$  deux entiers tels que  $n \geq N$  et  $m \geq N$ . Nous allons montrer que  $|u_n - u_m| < \varepsilon$ .

Soit  $q = mn$  (en fait, la suite de l'exercice fonctionnerait aussi bien en prenant pour  $q$  n'importe quel multiple commun de  $n$  et  $m$ ). Par inégalité triangulaire, on a :  $|u_n - u_m| \leq |u_n - u_q| + |u_m - u_q|$ , ainsi pour atteindre notre but il suffit de montrer que  $|u_n - u_q| < \varepsilon/2$ .

$$|u_n - u_q| = \left| \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n})}{n} - \frac{f(0) + f(\frac{1}{q}) + \dots + f(\frac{q-1}{q})}{q} \right|$$

On peut écrire ce qui précède comme suit :

$$|u_n - u_q| = \frac{1}{mn} \left| \sum_{j=0}^{n-1} m f\left(\frac{j}{n}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{mj+k}{mn}\right) \right|.$$

D'où la majoration suivante :

$$|u_n - u_q| \leq \frac{1}{mn} \sum_{j=0}^{n-1} \left| m f\left(\frac{j}{n}\right) - \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{j}{n} + \frac{k}{mn}\right) \right|$$

et enfin

$$|u_n - u_q| \leq \frac{1}{mn} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n} + \frac{k}{mn}\right) \right|.$$

Or  $(\frac{j}{n} + \frac{k}{mn}) - \frac{j}{n} = \frac{k}{mn} \leq 1/n \leq 1/N \leq \delta$ . Ainsi pour tous  $j$  et  $k$  de la somme précédente, on a  $|f(\frac{j}{n}) - f(\frac{j}{n} + \frac{k}{mn})| < \varepsilon/2$  d'où la conclusion :  $|u_n - u_q| < \varepsilon/2$ .

2. Que calcule-t-on lorsqu'on passe à la limite ?

On calcule l'intégrale suivante :  $\int_0^1 f(t)dt$ .

### Exercice 9.

1. Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs ou nuls telle que pour tous  $n, m$ ,  $u_{n+m} \leq u_n \cdot u_m$ . Montrer que la suite  $((u_n)^{\frac{1}{n}})$  est convergente.

Remarque : dans cet exercice je vais utiliser la notion de limite sup, notion traitée dans l'exercice 10.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé pour le moment et soit  $m \geq n$ . Via une division euclidienne, écrivons  $m = qn + r$  avec  $0 \leq r < n$ . On a

$$u_m = u_{qn+r} \leq u_{qn} u_r \leq u_n^q u_r.$$

D'où

$$u_m^{1/m} \leq u_n^{q/n} \cdot u_r^{1/m}.$$

On peut écrire  $\frac{q}{m} = \frac{1}{n} - \frac{r}{nm}$  d'où

$$u_m \leq u_n^{1/n} u_n^{-r/nm} u_r^{1/m}.$$

Remarquons que  $r$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que  $n$  est fixé. En passant à la limite sup sur  $m$  on obtient  $\limsup u_m^{1/m} \leq u_n^{1/n}$  et ceci pour tout  $n$ . Maintenant on prend la limite inf sur  $n$  et on obtient  $\limsup u_n^{1/n} \leq \liminf u_n^{1/n}$  ce qui (voir ex. 10) implique la convergence voulue.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on pose  $\|A\| = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$ . Montrer que la suite  $(\|A^n\|^{\frac{1}{n}})$  admet une limite et que celle-ci est  $\max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Spec}(A)\}$ .

(a) Montrons pour commencer que pour deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a :  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Laissé en exercice (faire une étude des cas possibles).

(b) Il existe une matrice triangulaire supérieure  $T$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $P^{-1}AP = T$  (En math III Algèbre, on voit qu'une matrice est trigonalisable si son polynôme caractéristique est scindé.)

Ainsi  $T$  peut prendre deux formes :

◦ Cas 1 : Si  $A$  est diagonalisable, alors on peut supposer  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$  avec  $\lambda$  et  $\lambda'$  qui peuvent être égaux.

◦ Cas 2 : Si  $A$  n'est pas diagonalisable, alors on peut supposer  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

- (c) Par (a), on obtient facilement que les suites  $(\|A^n\|^{1/n})$  et  $(\|T^n\|^{1/n})$  satisfont les conditions de la question 1. Par conséquent, ces suites convergent. Montrons qu'elles ont même limite. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $T^n = P^{-1}A^nP$ . Par (a), on obtient

$$\|T^n\| \leq \|P^{-1}\| \|A^n\| \|P\|$$

puis

$$\|T^n\|^{1/n} \leq \|P^{-1}\|^{1/n} \|A^n\|^{1/n} \|P\|^{1/n}.$$

Quand on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  on obtient  $\lim \|T^n\|^{1/n} \leq 1 \cdot \lim \|A^n\|^{1/n} \cdot 1$ .

De façon symétrique on obtient l'inégalité inverse. D'où l'égalité annoncée.

- (d) Grâce à (c), il suffit de montrer que  $\lim \|T^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Spec}(A)\}$ .

Supposons que l'on soit dans le cas 1.

Dans ce cas, on a :  $\|T^n\| = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda'^n \end{pmatrix}$ . Par conséquent,  $\|T^n\| = \max\{|\lambda|^n, |\lambda'|^n\}$  et  $\|T^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda|, |\lambda'|\}$ . D'où la limite voulue.

Supposons que l'on soit dans le cas 2.

On peut supposer que  $\lambda \neq 0$  car sinon pour tout  $n \geq 2$ ,  $T^n = 0$  ce qui implique trivialement le résultat recherché.

Ici, on a  $T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ . Par conséquent,  $\|T^n\|^{1/n} = (|\lambda|^n + n|\lambda|^{n-1})^{1/n}$ . On obtient  $\|T^n\|^{1/n} = |\lambda| \cdot (1 + \frac{n}{|\lambda|})^{1/n}$ . La limite de  $(1 + \frac{n}{|\lambda|})^{1/n}$  est 1 (il s'agit d'un cas bien connu où l'on écrit  $(1 + \frac{n}{|\lambda|})^{1/n} = \exp(\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{n}{|\lambda|}))$ ).

**Exercice 10.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On définit

$$\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{u_k; k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

$$\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k; k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

1. Justifier l'existence des ces limites.

Notons dans la suite,

$$u_n^+ = \sup\{u_k; k \geq n\} \text{ et } u_n^- = \inf\{u_k; k \geq n\}.$$

Ce sont des suites prenant leurs valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

La suite  $(u_n^+)$  est ou bien constante égale à  $+\infty$  ou bien décroissante dans  $\mathbb{R}$ . De même pour  $(u_n^-)$  qui est croissante. De plus pour tout  $n$ ,  $u_n^+ \geq u_n^-$  donc ces deux suites convergent.

2. Calculer  $\limsup (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$  et  $\liminf (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ .

On trouve facilement  $\limsup u_n = 1$  et  $\liminf u_n = -1$ .

3. Montrer que  $\limsup u_n$  est la valeur d'adhérence maximale de la suite  $(u_n)$ .

*Remarque :* une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  est la limite d'une sous-suite convergente de  $(u_n)$ .

Ici il y a deux choses à montrer. En premier lieu, il faut montrer que  $\limsup u_n$  est une valeur d'adhérence. En second lieu, il faut montrer que toute valeur d'adhérence de  $(u_n)$  lui est inférieure ou égale.

Commençons par montrer que  $\limsup u_n$  est bien une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Notons  $l^+ = \limsup u_n$ .

Nous ne traiterons que le cas où  $l^+$  est fini (je vous laisse en exercice le cas où  $l^+ = +\infty$ ).

Soit  $k$  un entier positif. Posons  $\varepsilon = \frac{1}{2k}$ . Par définition de la limite  $l^+$ , il existe un entier  $N_k$  tel que pour  $n \geq N_k$ ,  $|u_n^+ - l^+| < \varepsilon = \frac{1}{2k}$ , autrement dit :

$$\forall n \geq N_k, l^+ - \varepsilon < u_n^+ < l^+ + \varepsilon.$$

Posons  $n_0 = 0$  et supposons construit (par induction) un entier  $n_{k-1} > 0$  tel que  $|u_{n_{k-1}} - l^+| < \frac{1}{2(k-1)}$ .

Soit alors  $n > \max\{N_k, n_{k-1}\}$ . Par hypothèse,  $u_n^+ = \sup\{u_j | j \geq n\}$ . Donc, par définition du sup, il existe  $n_k \geq n > n_{k-1}$  tel que

$$u_n^+ - \varepsilon < u_{n_k} \leq u_n^+.$$

En conséquence,

$$|u_{n_k} - l^+| \leq |u_{n_k} - u_n| + |u_n - l^+| < 2\varepsilon = \frac{1}{k}.$$

Ainsi donc on a construit une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  qui converge vers  $l^+$  et ce dernier est donc bien une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ .

Montrons maintenant que  $l^+$  est supérieur ou égale à toute autre valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Soit donc  $\alpha$  une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Soit  $(u_{n_k})$  une sous-suite de  $(u_n)$  qui converge vers  $\alpha$ .

Pour tout entier  $k \geq 0$ , on a  $n_k \geq k$  (car  $n_k$  est une suite d'entiers strictement croissante) d'où

$$u_{n_k} \leq \sup\{u_j | j \geq k\} = u_k^+.$$

En passant à la limite lorsque  $k$  tend vers l'infini, on obtient  $\alpha \leq l^+$ .

4. Montrer que  $(u_n)$  converge (dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ) si et s. si  $\limsup u_n = \liminf u_n$ .

Supposons que les limites inf et sup coïncident. On a de manière triviale que pour tout  $n$ ,

$$u_n^+ \leq u_n \leq u_n^-$$

d'où l'on conclut que  $(u_n)$  converge.

Réciproquement, supposons que  $(u_n)$  converge. Notons  $l$  sa limite. Alors toute sous-suite de  $(u_n)$  converge également vers  $l$ . Donc par la question précédente,  $\limsup u_n = l$ . Comme dans la question précédente on peut montrer que  $\liminf u_n$  est la plus petite valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . On en déduit comme précédemment que  $l = \liminf u_n$ , d'où la conclusion voulue.