

**TD 3 : Corrections d'exercices**  
(Ex. 6 - Ex. 7 avec un complément)

**Exercice 6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $(x_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une suite de  $X$ . On suppose que pour tout  $m$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m,n} = x_m$  et que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ . Montrer que  $(x_{m,n})$  admet une sous-suite de la forme  $(x_{k,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,n_k} = x$ .

Avant d'entamer l'exercice proprement dit, faisons un rappel. Dans  $(X, d)$  soit  $(u_n)$  une suite et  $x$  un élément. Dire qu'une sous-suite de  $(u_n)$  tend vers  $x$  équivaut à l'assertion suivante : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $d(u_n, x) < \varepsilon$ . (Si ce résultat n'est pas clair pour vous, prenez le temps de le (re)démontrer et demandez moi si vous n'y parvenez pas).

Revenons à l'exercice. Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse, la suite  $(x_{k,n})_n$  tend vers  $x_k$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Appliquons la définition de la convergence avec  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ . Il existe donc un entier (qui dépend de  $\varepsilon$  et donc de  $k$ ), notons le  $n_k$ , tel que pour tout  $n \geq n_k$ , on ait  $d(x_{k,n}, x_k) < \frac{1}{k+1}$ . En particulier, on a :

$$d(x_{k,n_k}, x_k) < \frac{1}{k+1}.$$

Nous allons montrer que la suite  $(x_{k,n_k})_k$  répond à la question initiale. Ayant le rappel précédent en tête, soit  $\varepsilon > 0$  un nombre réel fixé. Par hypothèse, la suite  $(x_k)_k$  tend vers  $x$ . Ainsi, il existe un entier  $K$  tel que pour tout  $k \geq K$ , on ait

$$d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(on verra plus clairement dans la suite pourquoi on coupe  $\varepsilon$  en deux).

Soit maintenant  $K'$  un entier tel que  $\frac{1}{K'+1} < \frac{\varepsilon}{2}$  (c'est bien évidemment possible en prenant  $K'$  assez grand). Soit maintenant  $k$  un entier plus grand que  $\max\{K, K'\}$ . Alors on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} d(x_{k,n_k}, x) &\leq d(x_{k,n_k}, x_k) + d(x_k, x) \\ &< \frac{1}{k+1} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{1}{K'+1} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Grâce au rappel, on peut conclure.

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$ . Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales qui converge dans  $E$  vers une fonction non polynomiale. Montrer que la suite des degrés des  $P_n$  tend vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la suite des degrés ne tend pas vers l'infini.

Notons  $d_n = \deg(P_n)$ . Par hypothèse  $(d_n)$  ne tend pas vers l'infini.

Rappelons qu'une suite  $(x_n)$  de  $\mathbb{R}$  tend vers  $+\infty$  signifie la chose suivante : pour tout  $D > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n > D$ .

Ainsi dire que  $x_n$  ne tend pas vers  $+\infty$  se traduit comme suit : il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N$  tel que  $x_n \leq D$ .

C'est ainsi pour la suite  $(d_n)$ . Il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N$  tel que  $d_n \leq D$ .

De ceci, montrons qu'il existe une sous-suite de  $(d_n)$  qui majorée par  $D$ . Pour cela, prenons  $N = 0$  et appliquons le résultat précédent : il existe  $n_0 \geq N$  tel que  $d_{n_0} \leq D$ . Ensuite, prenons  $N = n_0 + 1$  et on obtient qu'il existe  $n_1 > n_0$  tel que  $d_{n_1} \leq D$ . On continue en prenant  $N = n_1 + 1$ , etc. Ceci montre (par récurrence) qu'il existe une suite d'entiers  $(d_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que pour tout  $k$ ,  $d_{n_k} \leq D$ .

Remarque : La suite des  $d_n$  est une suite d'entiers (car ce sont des degrés de polynômes) ainsi les  $d_{n_k}$  appartiennent à l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, E(D) + 1\}$  où  $E(D)$  signifie partie entière du nombre réel  $D$ . Autrement dit, les  $d_{n_k}$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs possibles. Par conséquent, il existe une sous-suite de la suite  $(d_{n_k})$  qui est constante. Autrement dit, il existe une sous-suite de  $(P_n)$  dont le degré est constant. Cette remarque ne nous sera pas indispensable dans la suite.

Quitte à travailler avec  $E(D) + 1$  au lieu de  $D$ , on peut supposer que  $D$  est un entier. Ainsi les  $P_{n_k}$  sont tous de degré  $\leq D$ .

Pour tout  $k$ , notons :

$$P_{n_k} = a_{0,k} + a_{1,k}x + \dots + a_{D,k}x^D.$$

Soient  $x_0, x_1, \dots, x_D \in [0, 1]$  des éléments distincts deux à deux.

Pour  $j = 0, \dots, D$ ,

$$P_{n_k}(x_j) = a_{0,k} \cdot 1 + a_{1,k} \cdot x_j + \dots + a_{D,k} \cdot x_j^D.$$

Ces  $D + 1$  égalités peuvent se traduire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_{n_k}(x_0) \\ P_{n_k}(x_1) \\ \vdots \\ P_{n_k}(x_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^D \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_D & \dots & x_D^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{0,k} \\ a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{D,k} \end{pmatrix}$$

Dans l'égalité ci dessus, notons  $U_k$  le vecteur de gauche,  $M$  la matrice et  $V_k$  le vecteur à droite. La matrice  $M$  est une matrice de Vandermonde qui est inversible (car son déterminant est le produit des  $x_j - x_{j'}$  avec  $j > j'$  donc non nul). Ainsi on peut écrire

$$V_k = M^{-1} \cdot U_k.$$

Or  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une certaine fonction  $f$ . Il en est donc de même de la suite  $(P_{n_k})$ . Or la convergence uniforme implique la convergence simple donc la suite  $(U_k)$  converge dans  $\mathbb{R}^{D+1}$  vers le vecteur

$$F := \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_D) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que la suite  $(V_k)$  converge dans  $\mathbb{R}^{D+1}$  vers  $M^{-1} \cdot F$ . En d'autres termes pour tout  $j = 0, \dots, D$ , la suite  $(a_{j,k})_k$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers un certain  $a_j$ .

Il reste à montrer que  $f$  est égal à la fonction polynomiale  $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_Dx^D$ .

Ceci est une conséquence directe de la convergence simple de  $(P_{n_k})$  vers  $f$ . En effet pour tout  $x \in [0, 1]$ , la suite  $P_{n_k}(x) = a_{0,k} + a_{1,k}x + \dots + a_{D,k}x^D$  converge vers  $f(x)$  et  $a_0 + a_1x + \dots + a_Dx^D$  qui sont donc égaux.

**Exercice complémentaire.** Un résultat connu (le théorème d'approximation de Weierstrass ou encore le théorème de Stone-Weierstrass) dit que sur un intervalle fermé borné, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonction polynomiale. Sur  $\mathbb{R}$ , la situation est différente, et voici ce que l'on a.

**Résultat.** Soit  $P_n$  une suite de polynômes qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction continue  $f$ . Alors  $f$  est polynomiale.

Nous allons démontrer ce résultat de deux façons différentes, l'une d'elle en utilisant l'ex. 7 ci-dessus.

Dans les deux variantes, le début est le même. Par hypothèse,  $\|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Or nous savons qu'une suite convergente est de Cauchy (c'est bien entendu l'implication inverse qui n'est pas toujours vraie, d'où l'introduction des espaces complets).

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n, m \geq N$  alors  $\|P_n - P_m\|_\infty < \varepsilon$ . En particulier, cela montre que : pour tout  $n \geq N$ ,  $\|P_n - P_N\|_\infty < \varepsilon$ .

Pour tout  $n$ , notons  $Q_n = P_n - P_N$  (rappelons que  $N$  est fixé). Dire que  $\|Q_n\|_\infty < \varepsilon$  signifie que  $Q_n$  est borné. Or  $Q_n$  est un polynôme et les seuls polynômes bornés sont les polynômes constants (en effet un polynôme de degré  $\geq 1$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ).

En conclusion, on a montré qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , le polynôme  $Q_n = P_n - P_N$  est un polynôme constant.

- Variante 1 : en utilisant l'ex. 7

Raisonnons par l'absurde et montrons que si la fonction limite  $f$  n'est pas polynomiale alors on aboutit à une contradiction.

En effet si  $P_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  alors elle converge uniformément sur  $[0, 1]$ . Puisque  $f$  n'est pas polynomiale, on peut appliquer l'ex. 7 et obtenir que la suite des degrés tend vers l'infini.

Or on a vu que pour  $n \geq N$ ,  $P_n - P_N$  est constant ce qui implique en particulier le degré est constant pour  $n \geq N$ , d'où l'absurdité.

- Variante 2 : sans l'ex. 7

Nous avons montré que pour  $n \geq N$ , le polynôme  $P_n - P_N$  est constant. Ainsi il existe  $y_n \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) - P_N(x) = y_n$ .

Rappelons encore une fois que la convergence uniforme implique la convergence simple donc la suite  $(P_n(0))$  converge dans  $\mathbb{R}$  donc la suite  $(P_n(0) - P_N(0))$  converge, i.e.  $(y_n)$  converge. Notons  $y$  sa limite.

Notons  $Q$  la fonction donnée par  $Q(x) = P_N(x) - y$ . C'est une fonction polynomiale. D'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) - Q(x) = y_n - y$  et ceci tend vers 0. Ainsi  $Q$  est limite simple de  $(P_n)$ . On en conclut que la limite uniforme de  $(P_n)$  est  $Q$ .