UCBL 2010/2011 - Semestre d'automne
L3 Mathématiques, Topologie

Fiche de TD 3 : Limite et continuité (I)

Exercice 1. Ici, $\mathbb{R}$ est muni de la métrique usuelle.

1. Montrer que $(\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2)$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $(\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x})$ est uniformément continue.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = nx$ si $x < \frac{1}{n}$ et $f(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$. Montrer que f_n converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3. Pour chacune des situations suivantes, donner un exemple d'espace topologique X.

1. X est infini et les seules suites convergentes sont constantes à partir d'un certain rang.
2. X est infini et toute suite converge vers tout point de X.
3. X est un espace métrique de cardinal fini > 1 tel que toute suite convergente est constante à partir d'un certain rang.
4. X est métrique et toute suite admet une valeur d'adhérence.

Exercice 4. Soient X un espace topologique séparé et (x_n) une suite de X.

1. Montrer que (x_n) admet au plus une limite.
2. On suppose qu'il existe un nombre premier $p > 2$ tel que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{pn}) convergent. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?
3. On suppose que pour tout nombre premier p, (x_{pn}) converge. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 5. Soient (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X et A et B des parties de X.

1. Montrer que si A est dense dans B et B est dense dans X alors A est dense dans X.
2. Montrer que si A et U sont dense dans X alors $A \cap U$ l'est aussi.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de X. On suppose que pour tout m, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m,n} = x_m$ et que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$. Montrer que $(x_{m,n})$ admet une sous-suite de la forme $(x_{k,n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k,n_k} = x$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0,1]\}$. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge dans E vers une fonction non polynomiale. Montrer que la suite des degrés des P_n tend vers l'infini.

Exercice 8. Soient $X_1, \ldots, X_n, Y$ des espaces topologiques. Notons $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. On munit X de la topologie produit. Pour $i = 1, \ldots, n$, notons $\pi_i : X \to X_i$ la projection naturelle. Soit $f : Y \to X$ une application.

1. Montrer que chaque π_i est continue.

2. Montrer que f est continue ssi pour tout i, $\pi_i \circ f$ est continue.
3. Montrer que chaque π_i est une application ouverte (i.e. envoie un ouvert sur un ouvert).
4. Montrer que les π_i ne sont pas nécessairement des applications fermées (considérer par exemple l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans $\mathbb{R}^2$).

Exercice 9. Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y. Supposons que $X = A \cup B$.

1. Montrer que si f est continue, alors $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues (A et B sont munis de la topologie induite).
2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.
3. Montrer que si A et B sont ouverts (ou fermés) alors la réciproque est vraie, i.e. si $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues alors f est continue.

Exercice 10. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice de A, $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, soit continue. On rappelle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

Exercice 11. (E, d) étant un espace métrique, montrer que l'application distance $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 12. Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \to F$ deux applications continues.

1. Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$.
3. Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.
4. Montrer que cette implication n'est pas vraie : Γ_f fermé $\implies f$ continue. *Indication :* on pourra considérer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 13.

1. Soient X, Y deux espaces topologiques. On suppose Y séparé. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues.
   (a) Montrer que $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.
   (b) En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X alors $f = g$.
2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx = 0$. Montrer que f est nulle.
   Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Exercice 14. Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E, on définit la fonction distance à A, $d(\cdot, A) : E \to \mathbb{R}$, par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}.$$

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne (i.e. qu'elle vérifie
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad \forall x, y \in E).$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
3. Montrer que si F et G sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V tels que
$$F \subset U,\ G \subset V,\ U \cap V = \emptyset.$$